Πολλαπλασιασμός ρητών αριθμών

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

Εισαγωγή

Πολλοί μαθητές της Α΄ Γυμνασίου δυσκολεύονται να κατανοήσουν τους αλγορίθμους των πράξεων στο σύνολο των ρητών αριθμών. Αυτό οφείλεται κυρίως στο πρόσημο που εισάγεται στην έννοια του αριθμού και αλλάζει την αντίληψη που έχουν σχηματίσει οι μαθητές για τους αριθμούς και τις πράξεις τους (επιστημολογικό εμπόδιο). Σ' αυτό συνηγορεί και η ιστορική πορεία των αρνητικών αριθμών που, όπως γνωρίζουμε, πέρασαν πολλοί αιώνες ώστε να εδραιωθούν στον χώρο των Μαθηματικών. Ενώ ήταν γνωστοί από την αρχαιότητα, άρχισαν να γίνονται αποδεκτοί ως μαθηματικές οντότητες τον $17^{ο}$ αιώνα και θεμελιώθηκαν αυστηρά τον $19^{ο}$ αιώνα!

Γι' αυτό, για την διδασκαλία των πράξεων στο σύνολο των ρητών αριθμών στην Α΄ Γυμνασίου, καλό είναι να χρησιμοποιούνται διάφορα μοντέλα, ώστε οι μαθητές να κατανοούν τους αντίστοιχους αλγόριθμους. Ειδικά για τον πολλαπλασιασμό, πρέπει να κατανοήσουν ότι ο κανόνας των προσήμων δεν ορίζεται αυθαίρετα, αλλά επιβάλλεται από άλλους μαθηματικούς και λογικούς κανόνες. Αν δοθεί απ' ευθείας, οι μαθητές δεν ικανοποιούνται, διότι δεν κατανοούν την σκοπιμότητα ενός τέτοιου ορισμού!

Επειδή λοιπόν η πιο αποτελεσματική μέθοδος διδασκαλίας στα Μαθηματικά είναι αυτή που στηρίζεται στην κατανόηση των εννοιών και των διαδικασιών, δίνονται στη συνέχεια μερικά μοντέλα για την διδασκαλία του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των ρητών αριθμών.

1. Αριθμητικό μοντέλο

Στο μοντέλο αυτό δίνουμε μία σειρά γινομένων ρητών αριθμών, η οποία ακολουθεί κάποιον λογικό κανόνα, με την βοήθεια της οποίας οι μαθητές ανακαλύπτουν τον κανόνα των προσήμων στο γινόμενο των ρητών αριθμών.

Τα γινόμενα με τα οποία ξεκινάμε έχουν θετικούς παράγοντες, διότι οι μαθητές αντιλαμβάνονται διαισθητικά τον ισομορφισμό μεταξύ του συνόλου των θετικών ακεραίων και του συνόλου των φυσικών αριθμών και έτσι δεν δυσκολεύονται να κατανοήσουν τέτοια γινόμενα. Για παράδειγμα, κατανοούν πολύ εύκολα ότι $(+5)\cdot(+4) = +20$, αφού γνωρίζουν ότι $5\cdot 4 = 20$.

Έτσι λοιπόν, μπορούμε να δώσουμε την παρακάτω σειρά γινομένων:

$(+5)\cdot(+4) = +20$
$(+5)\cdot(+3) = +15$
$(+5)\cdot(+2) = +10$
$(+5)\cdot(+1) = +5$
$(+5)\cdot 0 =$;
$(+5)\cdot(-1) =$;
$(+5)\cdot(-2) =$;

(για τα τρία τελευταία γινόμενα δίνουμε μόνο τους παράγοντες).

Οι μαθητές θα παρατηρήσουν ότι στα παραπάνω γινόμενα ο πρώτος παράγοντας είναι σταθερός, το +5, ενώ ο δεύτερος μειώνεται συνεχώς κατά μία μονάδα. Ακόμη, θα παρατηρήσουν ότι τα γινόμενα μειώνονται συνεχώς κατά πέντε (5) μονάδες, οπότε με την σωστή καθοδήγησή μας και ακολουθώντας αυτόν τον κανόνα θα συμπεράνουν ότι $(+5)\cdot 0 = 0$ (το διαισθάνονται άλλωστε) και ότι:

$$(+5)\cdot(-1) = -5 \quad \text{και} \quad (+5)\cdot(-2) = -10.$$

Έτσι, οι μαθητές αντιλαμβανόμενοι διαισθητικά και την αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού θα συμπεράνουν ότι το γινόμενο ενός ρητού με το μηδέν είναι ίσο με μηδέν και πως το γινόμενο δύο ετερόσημων ρητών αριθμών είναι αρνητικός αριθμός.

Αμέσως μετά πρέπει να δοθεί και μία άλλη σειρά γινομένων, όπως η παρακάτω, προκειμένου να εξαχθεί ο κανόνας του γινομένου δύο αρνητικών ρητών αριθμών:

$(-5)\cdot(+4) = -20$
$(-5)\cdot(+3) = -15$
$(-5)\cdot(+2) = -10$
$(-5)\cdot(+1) = -5$
$(-5)\cdot 0 = 0$
$(-5)\cdot(-1) =$;
$(-5)\cdot(-2) =$;

Οι μαθητές θα παρατηρήσουν πάλι ότι στα παραπάνω γινόμενα ο πρώτος παράγοντας είναι σταθερός, το -5 και ότι ο δεύτερος μειώνεται συνεχώς κατά μία μονάδα. Ακόμη, θα παρατηρήσουν ότι τα γινόμενα αυξάνονται συνεχώς κατά πέντε (5) μονάδες, οπότε θα συμπεράνουν διαισθητικά ότι:

$$(-5)\cdot(-1) = +5 \quad \text{και} \quad (-5)\cdot(-2) = +10$$

και θα ανακαλύψουν ότι το γινόμενο δύο αρνητικών ρητών αριθμών είναι θετικός αριθμός, δηλαδή $(-)\cdot(-) = +$.

Πρέπει να σημειωθεί ότι στα παραπάνω γινόμενα για ευκολία χρησιμοποιήθηκαν μόνο ακέραιοι αριθμοί. Στο αριθμητικό μοντέλο όμως μπορούν να χρησιμοποιηθούν οποιοιδήποτε ρητοί αριθμοί. Για παράδειγμα, για την δεύτερη φάση μπορούμε να δώσουμε και την παρακάτω σειρά γινομένων:

$(-2{,}5)\cdot(+2) = -5$
$(-2{,}5)\cdot(+1{,}5) = -3{,}75$
$(-2{,}5)\cdot(+1) = -2{,}5$
$(-2{,}5)\cdot(+0{,}5) = -1{,}25$
$(-2{,}5)\cdot 0 = 0$
$(-2{,}5)\cdot(-0{,}5) =$;
$(-2{,}5)\cdot(-1) =$;

(Ο πρώτος παράγοντας παραμένει σταθερός, ο δεύτερος μειώνεται σταθερά κατά 0,5 και τα γινόμενα αυξάνονται σταθερά κατά 1,25).

Παρατήρηση: Στο σχολικό βιβλίο χρησιμοποιείται το παραπάνω μοντέλο μόνο για την εξαγωγή του γινομένου δύο αρνητικών ρητών αριθμών, ενώ για το γινόμενο δύο ετερόσημων ρητών αριθμών χρησιμοποιούνται γινόμενα που οι παράγοντές τους αναφέρονται σε συγκεκριμένα μεγέθη. (Δείτε Α.Π.Σ. : http://www.p-theodoropoulos.gr/ergasies/didakt-depps-aps-math.pdf , σ. 283).

2. Αναλογικό μοντέλο

Με αυτό το μοντέλο διδασκαλίας της πράξης του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των ρητών αριθμών το γινόμενο δύο ακεραίων ή δύο ρητών γενικότερα ερμηνεύεται με τρόπο ανάλογο με αυτόν που ερμηνεύεται και στο σύνολο των φυσικών αριθμών. Τι δηλώνει, για παράδειγμα, το γινόμενο $4{\cdot}5$ στο σύνολο των φυσικών αριθμών; Δηλώνει ότι παίρνουμε 4 φορές το 5, δηλαδή ότι προστίθεται το 5 με τον εαυτόν του 4 φορές ($4{\cdot}5 = 5 + 5 + 5 + 5 = 20$). Στο σημείο αυτό ας θυμηθούμε τους όρους «*πολλαπλασιαστής–πολλαπλασιαστέος*». Γενικά το γινόμενο $\alpha{\cdot}\beta$ δύο φυσικών αριθμών α και β με $\alpha \neq 0$ μπορεί να ερμηνευτεί ως επανάληψη του β ως προσθετέου α φορές.

Με ανάλογο τρόπο μπορεί να ερμηνευτεί και το γινόμενο δύο ακεραίων ή δύο ρητών γενικότερα. Στο σύνολο των ρητών αριθμών όμως πρέπει να ερμηνευθεί και το πρόσημο του πρώτου παράγοντα. Έτσι, αν ο πρώτος παράγοντας είναι θετικός, τότε επαναλαμβάνεται ως προσθετέος ο δεύτερος παράγοντας τόσες φορές, όση είναι η απόλυτη τιμή του πρώτου. Π.χ. για τα γινόμενα $(+5){\cdot}(+4)$ και $(+5){\cdot}(-4)$ έχουμε:

$$(+5){\cdot}(+4) = 5{\cdot}(+4) = (+4) + (+4) + (+4) + (+4) + (+4) = +20 \quad \text{και}$$

$$(+5){\cdot}(-4) = 5{\cdot}(-4) = (-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = -20 \qquad (1)$$

Στο σχολικό βιβλίο προτείνεται στους μαθητές να υπολογίσουν δύο τέτοια γινόμενα χωρίς να κάνουν τους πολλαπλασιασμούς. Πιο συγκεκριμένα, τους ζητείται να υπολογίσουν τα γινόμενα:

$$(+524{,}5){\cdot}(+10) \quad \text{και} \quad (-265{,}4){\cdot}(+10)$$

(το +10 και στα δύο γινόμενα παίζει τον ρόλο του *πολλαπλασιαστή*).

Την περίπτωση αυτή εύκολα την κατανοούν οι μαθητές αφού, όπως αναφέρθηκε, διαισθάνονται τον ισομορφισμό μεταξύ των θετικών ακεραίων και των φυσικών αριθμών.

Αν όμως ο πρώτος παράγοντας είναι αρνητικός, τότε επαναλαμβάνεται ο αντίθετος του δεύτερου παράγοντα, δηλ. για το γινόμενο $(-4){\cdot}(+5)$ έχουμε:

$$(-4){\cdot}(+5) = 4{\cdot}(-5) = (-5) + (-5) + (-5) + (-5) = -20 \qquad (2).$$

Κατά την διδασκαλία είναι καλό να χρησιμοποιούνται γινόμενα σαν τα παραπάνω (1) και (2), δηλαδή το ίδιο γινόμενο με αντιμετάθεση των παραγόντων, γιατί έτσι οι μαθητές διαισθανόμενοι την αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των ρητών αριθμών πείθονται πιο εύκολα για την ορθότητα της διαδικασίας.

Για μια αιτιολόγηση του ρόλου του αρνητικού προσήμου του πρώτου παράγοντα στην παραπάνω διαδικασία μπορούμε να δώσουμε τα παρακάτω γινόμενα, όπου το ένα στηρίζεται στην ιδιότητα του +1 ως ουδέτερου στοιχείου του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των ρητών αριθμών και το άλλο στον τρόπο κατασκευής των αρνητικών αριθμών.

Δηλαδή έχουμε:

$(-5)\cdot(+1)=-5$ [το +1 είναι ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού]

και

$5\cdot(-1)=-5$ [το -5 προκύπτει, αν ληφθεί 5 φορές η αρνητική μονάδα].

Από τις δύο παραπάνω ισότητες προκύπτει ότι:

$(-5)\cdot(+1)=5\cdot(-1)$ (*)

Δηλαδή το γινόμενο $(-5)\cdot(+1)$ είναι ίσο με

(την απόλυτη τιμή του -5) ***επί*** (τον αντίθετο του +1).

Γενικεύοντας την παραπάνω σχέση μπορούμε να δώσουμε γινόμενα όπως τα παρακάτω:

$(-4)\cdot(+2{,}5) = 4\cdot(-2{,}5) = (-2{,}5) + (-2{,}5) + (-2{,}5) + (-2{,}5) = -10$ και

$(-4)\cdot(-2{,}5) = 4\cdot(+2{,}5) = (+2{,}5) + (+2{,}5) + (+2{,}5) + (+2{,}5) = +10$

και έτσι οι μαθητές θα συμπεράνουν ότι το γινόμενο δύο αρνητικών ρητών αριθμών είναι θετικός αριθμός, δηλαδή ότι $(-)\cdot(-)=+$.

Για εποπτική παρουσίαση του μοντέλου αυτού μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μικροεφαρμογή GeoGebra:

https://www.geogebratube.org/student/m328589

που δημιούργησα, η οποία αποσκοπεί στην κατανόηση και εύκολη απομνημόνευση του κανόνα των προσήμων στον πολλαπλασιασμό των ρητών αριθμών.

3. **Φυσικό μοντέλο**

Στο μοντέλο αυτό χρησιμοποιούνται φυσικά μεγέθη με προσημασμένες τιμές, τα οποία αναφέρονται στην κίνηση ενός οχήματος. Οι μαθητές μελετώντας την κίνηση του οχήματος αυτού κατανοούν εύκολα τον αλγόριθμο και τον κανόνα των προσήμων για την πράξη του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των ρητών αριθμών.

Κατά την διδασκαλία πρέπει να τονίζουμε στους μαθητές ότι οι ρητοί αριθμοί (θετικοί και αρνητικοί) επινοήθηκαν και χρησιμοποιούνται για μεγέθη που επιδέχονται αντίθεση, δηλαδή που μπορούν να βρεθούν σε δύο αντίθετες καταστάσεις, όπου για την μία χρησιμοποιείται το πρόσημο "+" και για την αντίθετη το "–".

Η περιγραφή του μοντέλου αυτού και η διαδικασία περιέχονται στην μικροεφαρμογή GeoGebra:

https://www.geogebratube.org/student/m375169 που δημιούργησα, την οποία μπορείτε να χρησιμοποιείτε ή, αν αυτό είναι αδύνατο, να εφαρμόζετε στον πίνακα την διαδικασία που περιγράφεται σ' αυτήν.

Σχόλιο

Κρίνοντας και συγκρίνοντας τα παραπάνω μοντέλα μπορούμε να αναφέρουμε τα εξής:

Το **αριθμητικό** μοντέλο βοηθά τους μαθητές να ανακαλύψουν και να κατανοήσουν τον αλγόριθμο και τον κανόνα των προσήμων για την πράξη του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των ρητών αριθμών. Ως μειονέκτημα όμως του μοντέλου αυτού μπορεί να θεωρηθεί το ότι οι αριθμοί είναι αφηρημένοι, δηλαδή δεν αναφέρονται σε συγκεκριμένα μεγέθη. Αυτό ίσως δυσκολέψει κάποιους μαθητές να κατανοήσουν βαθύτερα την πράξη του πολλαπλασιασμού ρητών αριθμών, αφού δεν θα υπάρχει η εμπειρία που προσφέρει η σύνδεση με εφαρμογές από την καθημερινή ζωή.

Το **αναλογικό** μοντέλο βοηθά επίσης τους μαθητές να κατανοήσουν τον αλγόριθμο και τον κανόνα των προσήμων για τον πολλαπλασιασμό των ρητών αριθμών. Φυσικά και εδώ υπάρχει το μειονέκτημα των αφηρημένων αριθμών. Όμως, κάποιοι μαθητές ίσως δυσκολευτούν να κατανοήσουν την περίπτωση κατά την οποία ο πρώτος παράγοντας είναι αρνητικός. Γι' αυτό θα πρέπει να δοθεί έμφαση και να εξηγηθεί καλά η σχέση (*). Αλλά, αν το επίπεδο της τάξης το επιτρέπει, μπορούμε να δώσουμε με συγκεκριμένο παράδειγμα και μια γενικότερη εξήγηση, όπως η παρακάτω:

$(-5)\cdot(+10) = (-5)\cdot\big((+1)\cdot 10\big)$ [το +10 προκύπτει, αν ληφθεί 10 φορές η θετική μονάδα]

$= \big((-5)\cdot(+1)\big)\cdot 10$ [προσεταιριστική ιδιότητα]

$= \big(5\cdot(-1)\big)\cdot 10$ [σχέση (*)]

$= 5\cdot\big((-1)\cdot 10\big)$ [προσεταιριστική ιδιότητα]

$= 5\cdot(-10)$ [το −10 προκύπτει, αν ληφθεί 10 φορές η αρνητική μονάδα].

Το **φυσικό** μοντέλο ίσως είναι πιο αποτελεσματικό, διότι αναφέρεται σε συγκεκριμένα μεγέθη. Θα πρέπει όμως οι μαθητές να κατανοήσουν την ερμηνεία των προσήμων των μεγεθών που εμπλέκονται στη διαδικασία. Γι' αυτό κατά την διδασκαλία θα πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή σ' αυτό. Πρέπει να σημειωθεί ακόμη ότι στην αντίστοιχη μικροεφαρμογή για τον πολλαπλασιασμό των ρητών αριθμών χρησιμοποιούνται μόνο ακέραιοι αριθμοί. Οι μαθητές όμως πιστεύω ότι διαισθητικά θα συμπεράνουν πως ο ίδιος κανόνας ισχύει για οποιουσδήποτε ρητούς αριθμούς.

Περιγραφή και σχολιασμός μιας σχετικής δειγματικής διδασκαλίας

Επιτρέψτε μου να μεταφέρω εδώ την προσωπική μου εμπειρία και τις παρατηρήσεις μου σχετικά με μία δειγματική διδασκαλία που πραγματοποίησα στο 4ο Γυμνάσιο Τρίπολης για τον πολλαπλασιασμό των ρητών αριθμών. Η διδασκαλία έγινε με την βοήθεια του φυσικού μοντέλου, στις 4 Μαΐου 2015, στο τμήμα Α2 της Α΄ τάξης, στην βιβλιοθήκη του σχολείου, όπου υπήρχε ηλεκτρονικός υπολογιστής συνδεδεμένος στο Διαδίκτυο με την βοήθεια του οποίου προβλήθηκε σε μεγάλη οθόνη η μικροεφαρμογή που αναφέρθηκε παραπάνω.

Καταρχάς να σημειωθεί ότι η ίδια η μικροεφαρμογή τράβηξε την προσοχή και το ενδιαφέρον των μαθητών. Αυτό είναι το πλεονέκτημα της εποπτείας!

Η διδασκαλία χωρίστηκε σε δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος έγινε η ψυχολογική και γνωσιολογική προετοιμασία των μαθητών και στο δεύτερο η επεξεργασία των δεδομένων και η εξαγωγή των συμπερασμάτων.

Στο πρώτο μέρος αρχικά αναφέρθηκα γενικά στο σύνολο των ρητών αριθμών όπου έγινε και συζήτηση με τους μαθητές σχετικά με τον ρόλο του προσήμου στην παράσταση ενός ρητού αριθμού και αναφέρθηκαν συγκεκριμένα παραδείγματα. Στη συνέχεια, “άνοιξα” τις προαπαιτούμενες γνώσεις της μικροεφαρμογής και έγινε προσπάθεια να κατανοήσουν οι μαθητές ότι στο παράδειγμα που υπάρχει στις προαπαιτούμενες γνώσεις το γινόμενο της ταχύτητας με τον χρόνο κίνησης του οχήματος δίνει την θέση του οχήματος στην οδό. Κατόπιν έγινε η παρουσίαση του μοντέλου όπου τονίσθηκε ότι, αφού ως αρχή μέτρησης του χρόνου θεωρείται η στιγμή κατά την οποία το όχημα διέρχεται από την αρχή της χιλιομέτρησης της οδού, η θέση του οχήματος στην οδό και σ’ αυτήν την περίπτωση δίνεται από το γινόμενο της ταχύτητας με τον χρόνο. Η διαφορά σε σχέση με το παράδειγμα των προαπαιτούμενων γνώσεων είναι ότι οι τιμές των μεγεθών που εμπλέκονται στη διαδικασία του φυσικού μοντέλου είναι προσημασμένες, αφού τα μεγέθη επιδέχονται αντίθεση, δηλαδή μπορούν να βρεθούν σε δύο αντίθετες καταστάσεις.

Στο δεύτερο μέρος έγινε η διδασκαλία του γινομένου δύο ρητών αριθμών παρουσιάζοντας με την μικροεφαρμογή τους τέσσερις συνδυασμούς των προσήμων στο γινόμενο της ταχύτητας με τον χρόνο, το οποίο προσδιορίζει τη θέση του οχήματος στην οδό. Το πρόσημο του γινομένου καθορίζεται από τα πρόσημα των τιμών της ταχύτητας και του χρόνου με φυσικό τρόπο. Η διδασκαλία των συνδυασμών των προσήμων έγινε με την παρακάτω σειρά:

1. $(+)\cdot(+) = +$ (*θετική ταχύτητα και θετικός χρόνος*).

Επειδή η ταχύτητα έχει θετικό πρόσημο, το όχημα κινείται προς την θετική κατεύθυνση, δηλαδή προς τα δεξιά και επειδή ο χρόνος είναι θετικός, το όχημα έχει προσπεράσει το Ο. Άρα βρίσκεται δεξιά του Ο.
Σ’ αυτή την περίπτωση, για παράδειγμα, το γινόμενο $(+50)\cdot(+2)$ σημαίνει ότι το όχημα βρίσκεται $2\cdot 50 = 100$ χιλιόμετρα δεξιά του Ο, δηλαδή στο σημείο +100 της οδού.
Άρα $(+50)\cdot(+2) = +100$.

<u>Σημείωση</u>: Αυτή η περίπτωση συσχετίσθηκε με το παράδειγμα που υπάρχει στις προαπαιτούμενες γνώσεις της μικροεφαρμογής.

2. $(+)\cdot(-) = -$ (*θετική ταχύτητα και αρνητικός χρόνος*).

Επειδή η ταχύτητα έχει θετικό πρόσημο, το όχημα κινείται προς την θετική κατεύθυνση, δηλαδή προς τα δεξιά και επειδή ο χρόνος είναι αρνητικός, το όχημα δεν έχει φτάσει ακόμη στο Ο. Άρα βρίσκεται αριστερά του Ο.
Σ' αυτή την περίπτωση, για παράδειγμα, το γινόμενο $(+50)\cdot(-2)$ σημαίνει ότι το όχημα βρίσκεται $2\cdot 50 = 100$ χιλιόμετρα αριστερά του Ο, δηλαδή στο σημείο -100 της οδού.
Άρα $(+50)\cdot(-2) = -100$.

3. $(-)\cdot(+) = -$ (*αρνητική ταχύτητα και θετικός χρόνος*).

Επειδή η ταχύτητα έχει αρνητικό πρόσημο, το όχημα κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση, δηλαδή προς τα αριστερά και επειδή ο χρόνος είναι θετικός, το όχημα έχει προσπεράσει το Ο. Άρα βρίσκεται αριστερά του Ο.
Σ' αυτή την περίπτωση, για παράδειγμα, το γινόμενο $(-50)\cdot(+2)$ σημαίνει ότι το όχημα βρίσκεται $2\cdot 50 = 100$ χιλιόμετρα αριστερά του Ο, δηλαδή στο σημείο -100 της οδού.
Άρα $(-50)\cdot(+2) = -100$.

4. $(-)\cdot(-) = +$ (*αρνητική ταχύτητα και αρνητικός χρόνος*).

Επειδή η ταχύτητα έχει αρνητικό πρόσημο, το όχημα κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση, δηλαδή προς τα αριστερά και επειδή ο χρόνος είναι αρνητικός, το όχημα δεν έχει φτάσει ακόμη στο Ο. Άρα βρίσκεται δεξιά του Ο.
Σ' αυτή την περίπτωση, για παράδειγμα, το γινόμενο $(-50)\cdot(-2)$ σημαίνει ότι το όχημα βρίσκεται $2\cdot 50 = 100$ χιλιόμετρα δεξιά του Ο, δηλαδή στο σημείο $+100$ της οδού.
Άρα $(-50)\cdot(-2) = +100$.

Όλες οι περιπτώσεις παρουσιάστηκαν με την μικροεφαρμογή, ώστε να έχουν οι μαθητές εποπτική εμπειρία όλων των συνδυασμών των προσήμων στο γινόμενο δύο ρητών αριθμών και να κατανοήσουν έτσι την ορθότητα του κανόνα.

Οι μαθητές, όπως φάνηκε από τις απαντήσεις που μας έδωσαν στις απλές προφορικές ερωτήσεις που τους υποβλήθηκαν, κατανόησαν τον κανόνα. Θεωρώ όμως ότι δεν τον εμπέδωσαν πλήρως και αυτό οφείλεται στον λιγοστό χρόνο που διατέθηκε για την διδασκαλία του γινομένου. Γι' αυτό προτείνω η διδασκαλία να ολοκληρώνεται σε δύο διδακτικές ώρες. Να διδάσκεται και να αναλύεται κάθε περίπτωση χωριστά δίνοντας ταυτόχρονα με την εποπτική παρουσίαση και μικρές ασκήσεις στους μαθητές για εξάσκηση και εμπέδωση.

Επαναλαμβάνω πως είναι πολύ σημαντικό να κατανοήσουν οι μαθητές ότι ο κανόνας των προσήμων στον πολλαπλασιασμό των ρητών αριθμών δεν δίνεται αυθαίρετα, αλλά επιβάλλεται από άλλους λογικούς κανόνες και αυτό επιβεβαιώνεται και με τις εφαρμογές. Έτσι θα τον εμπεδώσουν πλήρως και θα τον εφαρμόζουν συνειδητά και όχι μηχανικά.

Το παράδειγμα της μικροεφαρμογής θεωρώ πως είναι πολύ καλό για να κατανοήσουν οι μαθητές με συγκεκριμένους αριθμούς τον κανόνα των προσήμων στο γινόμενο δύο ρητών αριθμών και κυρίως την περίπτωση όπου και οι δύο οι παράγοντες είναι αρνητικοί αριθμοί.

Στην Β΄ τάξη η μικροεφαρμογή αυτή μπορεί να παρουσιαστεί ως ένα παράδειγμα εφαρμογής του πολλαπλασιασμού ρητών αριθμών. Για τους μαθητές της τάξης αυτής θα είναι πιο εύκολη η κατανόηση, γιατί έχουν και αντίστοιχες γνώσεις φυσικής.

Κλείνοντας αξίζει να αναφερθεί πως η χρήση συγκεκριμένων αριθμών είναι ο καλύτερος τρόπος για να διδαχθούν οι πράξεις στο σύνολο των ρητών αριθμών σε μαθητές της Α΄ Γυμνασίου. Αυτό, γιατί με την εμπειρία που αποκτιέται χρησιμοποιώντας μεγέθη από την καθημερινή μας ζωή, μπορεί να υπερπηδηθεί πιο εύκολα το επιστημολογικό εμπόδιο που δημιουργεί η έννοια του προσήμου. Μια τέτοια προσπάθεια επιχειρείται και στην δημοσιευμένη εργασία μου:

http://www.p-theodoropoulos.gr/ergasies/didakt-praepopt2.pdf .

Τέλος, μπορείτε να δείτε και άλλες σχετικές διδακτικές προτάσεις στο *«Βιβλίο του Εκπαιδευτικού για τα Μαθηματικά της Α΄ Γυμνασίου»* των Ι. Βανδουλάκη – Χ. Καλλιγά – Ν. Μαρκάκη και Σ. Φερεντίνου. Ο.Ε.Δ.Β. (2007).