Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

Κατά την διδασκαλία της παραπάνω συνάρτησης θα πρέπει:

1. Να δοθεί ιδιαίτερη βαρύτητα στην υπερπήδηση του επιστημολογικού εμποδίου που δημιουργείται σχετικά με την κατανόησή της, διότι οι μαθητές μέχρι τη στιγμή που θα διδαχθούν την σχετική ενότητα έχουν την αντίληψη ότι μία συνάρτηση εκφράζεται μόνο με την βοήθεια των συμβατικών συναρτήσεων (πολυωνυμικών, τριγωνομετρικών κλπ.).

Γι' αυτό, καλό θα είναι η παραπάνω συνάρτηση να διδαχθεί με εποπτικό τρόπο, ώστε οι μαθητές να δουν τη δημιουργία μιας τέτοιας συνάρτησης με βασική ιδέα την μονοσήμαντη αντιστοίχιση και να οδηγηθούν μόνοι τους στον ορισμό της.

Για τον σκοπό αυτό έχω δημιουργήσει το εφαρμογίδιο (applet) GeoGebra:

http://tube.geogebra.org/student/m672911

στο οποίο φαίνεται εποπτικά η δημιουργία τέτοιων συναρτήσεων καθώς και κάποιες από τις ιδιότητές τους.

Στην βιβλιογραφία η ύπαρξη μιας τέτοιας συνάρτησης με την χαρακτηριστική ιδιότητα που έχει σχετικά με την παράγωγό της είναι γνωστή ως «*1^{o} θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού*» και σε μερικά βιβλία διατυπώνεται όπως και στο σχολικό (βλέπε Δ. Κάππος, *Απειροστικός Λογισμός*, 1962), ενώ σε άλλα με την γενική του μορφή, που είναι:

Θεώρημα: *Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και ολοκληρώσιμη κατά Riemann σε κάθε κλειστό υποδιάστημα του Δ. Αν $\alpha\in$ Δ, τότε ορίζεται η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ για κάθε $x\in$ Δ, η οποία για κάθε σημείο ξ του Δ που η f είναι συνεχής ισχύει $F'(\xi)=f(\xi)$.*

Να σημειωθεί ότι, για να είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann μία συνάρτηση f σε ένα κλειστό διάστημα [α, β], η συνέχεια της f είναι μόνο ικανή συνθήκη όχι και αναγκαία.

2. Να τονιστεί ότι και αυτή η συνάρτηση συμπεριφέρεται όπως και οι υπόλοιπες. Γι' αυτό θα πρέπει να λυθούν πολλές ασκήσεις οι οποίες θα αναφέρονται στο πεδίο ορισμού, στο όριο, στη σύνθεση, στην παράγωγο, στο ολοκλήρωμα και γενικά στην μελέτη συναρτήσεων αυτού του είδους, ώστε να συνειδητοποιήσουν οι μαθητές ότι ως προς τις ιδιότητες και την συμπεριφορά οι συναρτήσεις αυτές δεν διαφέρουν από τις υπόλοιπες συναρτήσεις.

3. Να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή και στην παραγωγισιμότητα της F και να τονιστεί ότι είναι μία παράγουσα της f και πως έτσι αποδεικνύεται ότι **κάθε συνεχής συνάρτηση έχει παράγουσα.**

Θα πρέπει όμως να επισημανθεί ότι ο εποπτικός τρόπος εξαγωγής της παραγώγου της F που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο δεν αποτελεί τυπική απόδειξη. Απλά το συμπέρασμα εξάγεται διαισθητικά.

Στο παραπάνω εφαρμογίδιο ο εποπτικός τρόπος εξαγωγής της παραγώγου της F δίνεται με δυναμικό τρόπο. Όμως, ίσως να μην πεισθούν ή να μην ικανοποιηθούν κάποιοι μαθητές. Γι' αυτό, στο εφαρμογίδιο αυτό προβάλλεται σε δεύτερο παράθυρο μια γεωμετρική απόδειξη, η οποία μπορεί να παρουσιαστεί και στους μαθητές και να λειτουργήσει πιο πειστικά ικανοποιώντας και τους πιο απαιτητικούς μαθητές.

Μια πιο αυστηρή τυπική απόδειξη του θεωρήματος δίνεται παρακάτω. Την απόδειξη αυτή την έχω προσαρμόσει στον συμβολισμό του σχολικού βιβλίου. Φυσικά δεν μπορεί να δοθεί στους μαθητές, αφού στηρίζεται στον ορισμό του ορίου που είναι εκτός ύλης. Δίνεται μόνο για δική μας επιστημονική κάλυψη.

Απόδειξη του θεωρήματος

Η συνέχεια της f στο $x \in \Delta$ σύμφωνα με τον ορισμό της συνέχειας σημαίνει ότι:

$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό h με $|h| < \delta$ και

$x + h \in \Delta \ \Rightarrow\ |f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$.

Έστω λοιπόν ένα $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ που εξαρτάται από το ε, δηλαδή: $\delta = \delta(\varepsilon)$, ώστε να ισχύει η παραπάνω συνεπαγωγή.
Για κάποιο h που ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη έχουμε:

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| = \left|\frac{\int_x^{x+h} f(t)dt - hf(x)}{h}\right| = \left|\frac{\int_x^{x+h} (f(t)-f(x))dt}{h}\right| \overset{u=t-x}{=}$$

$$= \left|\frac{\int_0^{h} (f(x+u)-f(x))du}{h}\right| < \frac{|h|\cdot\varepsilon}{|h|} = \varepsilon, \quad \text{αφού } |u| \le |h| < \delta.$$

Αποδείξαμε δηλαδή ότι:

$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε πραγματικό αριθμό h με $|h| < \delta$ και

$$x + h \in \varDelta \ \Rightarrow\ \left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| < \varepsilon\,.$$

Άρα:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = F'(x) = f(x)\,.$$