‘Επισκόπηση της ιστορικής και φιλοσοφικής εξέλιξης των Μαθηματικών με έμφαση στην περίπτωση της Γεωμετρίας’

Κουστένης Νίκος

Εισαγωγή

Σε αυτά τα 3000 χιλιάδες και πλέον χρόνια ιστορίας των μαθηματικών υπάρχουν ερωτήματα που απασχόλησαν τους μελετητές σχετικά με τις αιτίες της εξέλιξης, το αντικείμενο της επιστήμης, τις αλληλεπιδράσεις με το γενικότερο επιστημονικό αλλά και φιλοσοφικό περιεχόμενο της κάθε εποχής. Γιατί ο άνθρωπος ασχολήθηκε από τόσο νωρίς με τα μαθηματικά; Ήταν η φυσική ανάγκη να ανακαλύψει το άγνωστο ή μήπως απλοί πρακτικοί λόγοι που τον έκαναν να ψάχνει δρόμους να βελτιώσει την ζωή του; Τι ρόλο έπαιξαν τα ιστορικά γεγονότα της κάθε εποχής;[1] Σχετίζεται η μεγάλη άνθιση των μαθηματικών (αλλά και των επιστημών γενικότερα) κατά την διάρκεια των κλασσικών χρόνων της αρχαίας Ελληνικής ιστορίας με τη φιλοσοφία των αρχαίων Ελλήνων; Ο σκοταδισμός του Μεσαίωνα πόσο επηρέασε τη μαθηματική πρόοδο; Η μεγάλη τεχνολογική επανάσταση της σύγχρονης εποχής κατά πόσο άλλαξε τον προσανατολισμό της επιστήμης; Ερωτήματα που έχουν απαντηθεί πολλές φορές από πολλούς (σύγχρονους κυρίως) μελετητές. Αν και ως προς τα ιστορικά στοιχεία, (πάνω - κάτω) οι περισσότεροι συμφωνούν, ως προς τις προεκτάσεις υπάρχουν διαφωνίες. Ακόμα και ως προς την φύση του αντικειμένου των μαθηματικών μπορούμε να πούμε ότι «δεν γνωρίζουμε ούτε για το ποιο πράγμα μιλάμε, ούτε αν αυτό που λέμε είναι αληθές» (Bernard Russell).[2]

Στην εργασία αυτή σκοπός δεν είναι να απαντήσουμε σε τέτοιου είδους ερωτήματα. Θα κάνουμε μια σύντομη ιστορική αναδρομή σε πρόσωπα κυρίως αλλά και γεγονότα. Αναδρομή τόσο σε κυρίαρχες αντιλήψεις για το ουσιαστικό κομμάτι των μαθηματικών αλλά και σε φιλοσοφικές αντιλήψεις που επικρατούσαν ή που ακόμα έπονταν ως επακόλουθο της προόδου των μαθηματικών. Όπως και να το δει κανείς, η φιλοσοφία είναι ένα κομμάτι της ανθρώπινης ζωής. Τα μαθηματικά, ως εκ αντικειμένου είναι «καταδικασμένα» να επηρεάζουν με πολλούς τρόπους την ανθρώπινη ζωή˙ άρα είναι και αιτία δημιουργίας νέων φιλοσοφικών ρευμάτων τα οποία με την σειρά τους επηρεάζουν το σύνολο της ανθρώπινης συμπεριφοράς.

[1] «…Αν ο Einstein είχε γεννηθεί σε μια πρωτόγονη φυλή που δεν γνώριζε να μετρά πάνω από το τρία οποιαδήποτε προσήλωση του στα μαθηματικά, όσο μακρόχρονη και αν ήταν δεν θα απέδιδε περισσότερο από την ανάπτυξη ενός δεκαδικού συστήματος, που θα στηριζόταν στα δάχτυλα των χεριών και των ποδιών» Ralph Linton, [8], σελ 13

[2] [1] σελ 150

Η Ιστορική εξέλιξη των Μαθηματικών

Η μακρόχρονη ιστορία των μαθηματικών, από την εμφάνιση τους μέχρι σήμερα, χωρίζεται σε τέσσερις περιόδους ως εξής:[3]

Α) Προελληνικά Μαθηματικά (από την εμφάνιση του ανθρώπου μέχρι το 600 π.Χ. περίπου)
Β) Ελληνικά Μαθηματικά (από το 600 π.Χ. μέχρι το 500 μ.Χ.)
Γ) Μεσαιωνικά και Αναγεννησιακά Μαθηματικά (από το 500 μ.Χ. μέχρι το 1600 μ.Χ.)
Δ) Σύγχρονα μαθηματικά (από το 1600 μ.Χ. μέχρι και σήμερα)

Προελληνικά Μαθηματικά

Το πότε εμφανίστηκαν τα μαθηματικά στη Γη δεν είναι εξακριβωμένο. Η κοινή λογική βέβαια λέει ότι από την εμφάνιση του ανθρώπου, στοιχειώδεις αριθμητικοί υπολογισμοί αλλά και γεωμετρικές έννοιες άρχισαν σιγά-σιγά να χρησιμοποιούνται. Οι πρώτες σαφείς ενδείξεις ότι τα μαθηματικά άρχισαν να αντιμετωπίζονται ως επιστήμη είναι στον πολιτισμό των αρχαίων Αιγυπτίων. Πληροφορίες πολλές βέβαια για τα μαθηματικά των αρχαίων Αιγυπτίων δεν έχουμε. Αιτία είναι ότι ο πάπυρος, που ήταν το μέσο αποθήκευσης της γνώσης εκείνη την εποχή, είναι ένα πολύ ευαίσθητο υλικό και ως εκ τούτου η διατήρηση του για πολύ μεγάλες χρονικές περιόδους είναι πρακτικά αδύνατη. Ακόμα και οι λίγοι πάπυροι που διεσώθησαν μέχρι σήμερα πρακτικά αποτελούν ένα θαύμα. Τα κυριότερα ευρήματα που μας δίνουν πληροφορίες για τα μαθηματικά στην αρχαία Αίγυπτο είναι:

- Ο Πάπυρος Rhind, μια συλλογή 84 προβλημάτων που αντιγράφτηκε περίπου το 1650 π.χ. από ένα πρωτότυπο του 1850 π.Χ. [4]
- Πάπυρος της Μόσχας, γράφτηκε γύρω στο 1850 π.Χ. Είναι μια συλλογή 25 προβλημάτων.
- Ο δερμάτινος κύλινδρος, που γράφτηκε γύρω στο 1650 π.Χ. και περιέχει 26 αθροίσματα μοναδιαίων κλασμάτων.
- Επίσης, υπάρχει ο πάπυρος Kahun και ο πάπυρος του Βερολίνου, που είναι του 1850 π.Χ. περίπου και περιέχουν μαθηματικές πράξεις και προβλήματα.

Στα παραπάνω ευρήματα περιέχονται κυρίως, όπως φαίνεται, πίνακες με προβλήματα, μαθηματικούς υπολογισμούς και λύσεις πάνω σε πρακτικά προβλήματα αριθμητικής αλλά και γεωμετρίας. Υπάρχουν βέβαια γενικεύσεις και πρακτικές που επαναλαμβάνονται αλλά δεν μπορούν να θεωρηθούν ως θεωρητικές προσεγγίσεις της επιστήμης αφού απουσιάζουν θεωρήματα και αποδείξεις. Παρόλα αυτά υπάρχουν και «εντυπωσιακές», για την εποχή πάντα, μεθοδολογίες όπως στο πρόβλημα 26 του πάπυρου Rhind όπου χρησιμοποιήθηκε μια μεθοδολογία που συναντάται και

[3] [9] σελ 32
[4] [9] σελ 46

μεταγενέστερα: η μέθοδος της αυθαίρετης παραδοχής ή μέθοδος της λανθασμένης θέσης.

Η άλλη μεγάλη σχολή αυτής της περιόδου είναι η Βαβυλωνιακή. Τεχνοκράτες κυρίως οι Βαβυλώνιοι χρησιμοποίησαν τα Μαθηματικά ως εργαλείο, για την δημιουργία μηχανών και οχυρωματικών έργων.[5] Γνωρίζουμε περισσότερα για αυτούς γιατί χρησιμοποίησαν πήλινες πλάκες για να γράψουν[6], υλικό με πολύ μεγαλύτερη αντοχή από τον πάπυρο των Αιγυπτίων, όποτε κατάφεραν να διασωθούν πολύ περισσότερα από τα «γραπτά» τους. Οι Βαβυλώνιοι είχαν κάνει μεγάλες προόδους στην Αριθμητική, στη Γεωμετρία και στην Αστρονομία. Κατά τις ανασκαφές, που έγιναν, ήλθαν στο φως πάμπολλες πήλινες πινακίδες, γραμμένες στη σφηνοειδή γραφή. Μεταξύ αυτών των πινακίδων υπάρχουν 400 περίπου με μαθηματικό περιεχόμενο. Μια από τις πιο ενδιαφέρουσες πινακίδες είναι γνωστή ως πινακίδα *Plimpton 322* (συλλογή του G.A. Plimpton στο Πανεπιστήμιο Columbia στη Νέα Υόρκη) που περιέχει αριθμητικές σχέσεις μεταξύ των πλευρών ορθογωνίων τριγώνων αλλά και τα τετράγωνα του λόγου γ/α , δηλαδή τις τιμές της συντέμνουσας της γωνίας Α υψωμένης στο τετράγωνο. Τα αναγραφόμενα προβλήματα, καθώς και οι λύσεις τους, έχουν καθαρά πρακτικό χαρακτήρα. Σε αυτούς πιστώνεται το εξηνταδικό σύστημα αρίθμησης[7] που παραμένει ακόμα και σήμερα σε χρήση στη μέτρηση του χρόνου και των γωνιών. Η άλγεβρα αναπτύχθηκε σε σημαντικό βαθμό καθώς μπορούσαν να λύνουν εξισώσεις $1^{ου}$, $2^{ου}$ και $3^{ου}$ βαθμού, να λύνουν γραμμικά συστήματα καθώς και να υπολογίζουν ρίζες. Στη Γεωμετρία γνώριζαν και χρησιμοποιούσαν το «Πυθαγόρειο θεώρημα» και το «θεώρημα του Θαλή» χωρίς να υπάρχει όμως πουθενά κάποια σαφής διατύπωση θεωρήματος - όπως το αντιλαμβανόμαστε εμείς - ούτε κάποια απόδειξη.

Στο ίδιο πάνω-κάτω μοτίβο κινήθηκαν και άλλοι πολιτισμοί που υπήρξαν παράλληλα με τους αρχαίους Αιγύπτιους ή Βαβυλώνιους. Κρήτες, Κινέζοι, Φοίνικες, Μάγια… Όλοι όμως είχαν ένα κοινό χαρακτηριστικό. Δεν κωδικοποίησαν την γνώση. Δεν έφτιαξαν ένα στέρεο θεωρητικό υπόβαθρο πάνω στο οποίο θα στηριχτούν και θα προχωρήσουν. Έλυσαν πολλά προβλήματα που τους απασχολούσαν αλλά δεν έδωσαν τα εργαλεία που χρειάζονταν στην επιστήμη να προχωρήσει. Δειλά βήματα έγιναν σίγουρα. Έλειπε όμως μια συνολική Θεωρία που να ενώνει όλα τα κομμάτια. Ο τρόπος ζωής τους, το έντονο θεοκρατικό καθεστώς και ο φόβος ότι μια νέα θεωρία ίσως δεν είναι αρεστή στην εξουσία μάλλον έκανε τους μαθηματικούς των λαών αυτών να ακολουθήσουν την πεπατημένη. Ίσως έτσι εξηγείται και το γεγονός ότι γνωρίζουμε αρκετά για τα μαθηματικά της εποχής αλλά τίποτα για τους μαθηματικούς που τα επινόησαν.

Ελληνικά Μαθηματικά

Η άνοδος του Ελληνικού πολιτισμού που σταδιακά επικράτησε όλων των γειτονικών έδωσε στις επιστήμες μια εξαιρετική ώθηση. Για τα μαθηματικά η πρόοδος από τους απλούς υπολογισμούς που τους κληροδότησαν οι προκάτοχοι (Αιγύπτιοι και Βαβυλώνιοι) έως την αξιωματική θεμελίωση της επιστήμης ήταν ένα τεράστιο άλμα. Δεν είναι υπερβολή να πούμε ότι μετά τους αρχαίους Έλληνες τα

[5] [8] σελ 30
[6] [9] σελ 33
[7] [8] σελ 67

μαθηματικά είχαν την σημερινή τους μορφή. Είχαν ξεφύγει δηλαδή από τη λογική του εργαλείου που λύνει, υπολογίζει και απλοποιεί προβλήματα και είχαν πάει στην επιστήμη που προσπαθεί να παράγει αδιαμφισβήτητες αιώνιες αλήθειες.

Αν προσπαθήσει κάποιος να καταλάβει την αιτία αυτής της άνθισης, τότε μάλλον οι συνθήκες είναι το κλειδί. Ένα περιβάλλον μεγάλης ελευθερίας, πρωτοφανές για την εποχή, όπου οι πολίτες - ειδικά της Αθήνας – μπορούν, απαλλαγμένοι από το άγχος της επιβίωσης, να συζητούν. Θεσπίζουν κανόνες για την επιχειρηματολογία, μεθόδους διαλεκτικής. Αν φανταστεί κάποιος μια εικόνα όπου μέσα στην αρχαία αγορά οι «περιπατητές» αγωνίζονται με λογικά επιχειρήματα επί ώρες να πείσουν ο ένας τον άλλον για την «αλήθεια» χρησιμοποιώντας «αναλυτικές», «συνθετικές» και «επαγωγικές» μεθόδους και στηριζόμενοι μόνο σε κοινώς αποδεκτές αλήθειες, τότε η πρόοδος που συντελέστηκε δεν αποτελεί έκπληξη. Μάλλον λογική συνέπεια είναι. Βέβαια τα προβλήματα υπήρχαν και σε πολλές περιοχές αλλά και για μεγάλα χρονικά διαστήματα. Αλλά παρόλα αυτά οι συνθήκες που επικράτησαν σε σχέση με τις προηγούμενες αλλά και με τις επόμενες «Μεσαιωνικές», μπορούν να χαρακτηριστούν ιδανικές.[8]

Το ελατήριο πού έδωσε την ώθηση για να πραγματοποιηθεί εκείνη την εποχή η Ελληνική Πνευματική Επανάσταση ήταν η Γεωμετρία. Και οι Βαβυλώνιοι και οι Αιγύπτιοι είχαν μεταχειριστεί μία χονδροκομμένη, πρόχειρη γεωμετρία για να μετρούν τα χωράφια και τα κτίσματα τους, αλλά μόνο γι' αυτές τις πρακτικές εφαρμογές των υπολογισμών, για να βρίσκουν π.χ. πόσα τούβλα, ή πόσοι γρανιτόλιθοι χρειάζονταν στο χτίσιμο του δυτικού τοίχου του νέου ανακτόρου. Οι Έλληνες είχαν μια πολύ πιο θεωρητική, πιο «αφηρημένη» αντίληψη. Πίστευαν ότι ένα ορισμένο είδος σχήματος έχει αναλλοίωτες, εσωτερικές ιδιότητες, ανεξάρτητες από το μέγεθος του. Έτσι, ένα ορθογώνιο και ισοσκελές μπορεί να εκταθεί ή να μικρύνει αλλά θα παραμείνει και στις δύο περιπτώσεις ένα ορθογώνιο τρίγωνο 45°· Ο πρώτος Έλληνας πού συνέλαβε αυτήν τη θεμελιώδη δυνατότητα της αφαιρέσεως στη γεωμετρία — και συνέβαλε έτσι στη διαμόρφωση του ελληνικού οράματος, κατά το όποιο οι γνώσεις θα αυξάνουν σαν στέρεες, ανεστραμμένες πυραμίδες αποδείξεων, στηριγμένες σε λίγα βασικά αξιώματα— ήταν πιθανότατα ο **Θαλής ο Μιλήσιος** (600 π.Χ.). Τα πέντε θεωρήματα πού αποδίδονται σ' αυτόν έχουν μιαν εντυπωσιακή απλότητα που αποκαλύπτει την ενσυνείδητη προσπάθεια του Θαλή να θεμελιώσει τη Γεωμετρία σε βασικούς, αμετακίνητους όρους.

Η φιλοδοξία του Θαλή θα παρέμενε ίσως ανεκπλήρωτη αν δεν υπήρχε ένας άλλος Έλληνας, ο όποιος συνεργάσθηκε όπως πιστεύεται μαζί του. Αυτός ήταν ο **Πυθαγόρας**, ένας άνδρας με δυνατή, μαγνητική προσωπικότητα. Κατά την παράδοση, ο Πυθαγόρας ακολούθησε τη συμβουλή του Θαλή και ταξίδεψε χρόνια ολόκληρα για να ευρύνει το πεδίο των μαθηματικών γνώσεων του. Αφού έμαθε ότι είχε να μάθει, ο Πυθαγόρας ίδρυσε, γύρω στα 540 π.Χ., μια σχολή,[9] θρησκευτική-μαθηματική, στον Κρότωνα, μιαν ανθούσα ελληνική αποικία στο νότιο άκρο της Ιταλικής Χερσονήσου. Έκτος από τα μαθηματικά δίδασκε στους μαθητές – οπαδούς του τη λατρεία των αριθμών, τη μετενσάρκωση και τη μετεμψύχωση από άνθρωπο σε άνθρωπο και από άνθρωπο σε ζώο· τους όριζε να μην τρώνε κουκιά, να μένουν πάντα ανώνυμοι και να υπογράφουν με το όνομα της Πυθαγόρειας Αδελφότητας κάθε γραπτό και κάθε ανακάλυψη τους. Από τη διδασκαλία του Πυθαγόρα το ευρύτερα γνωστό θεώρημα είναι ασφαλώς το ομώνυμο. Οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν το θεώρημα αυτό 1.000 χρόνια νωρίτερα, τη δόξα όμως την πήρε η Πυθαγόρεια Σχολή που πρώτη

[8] [8] σελ 110
[9] Πυθαγόρεια σχολή [8] σελ 95

το απέδειξε. Ακόμη και σήμερα παραμένει ανυπολόγιστη η αξία του για την επιστήμη.

Και μετά ήρθε η «ρίζα». Η συντριπτική αυτή ανακάλυψη συγκλόνισε ολόκληρη την πορεία της ελληνικής μαθηματικής σκέψεως. Διέλυσε πραγματικά κάθε ελπίδα ότι η μέτρηση μπορούσε να χρησιμεύσει σα γέφυρα ανάμεσα στη Γεωμετρία και την Αριθμητική των ακεραίων αριθμών. Οι Έλληνες άρχισαν ν' αυτοπεριορίζονται στη γεωμετρία των σχημάτων πού δεν την απασχολούσαν οι μετρήσεις άλλα μόνο τα σχήματα. Έτσι μπορούσαν, αν όχι να μετρήσουν, πάντως να σχεδιάσουν μερικούς ασύμμετρους αριθμούς, όπως τη $\sqrt{2}$, σα μια ορισμένη υποτείνουσα σ' ένα ορισμένο ορθογώνιο τρίγωνο.[10]

Οι ασύμμετροι αριθμοί όμως, καθώς και η έννοια του απείρου, δεν ήταν δυνατόν να εξοστρακισθούν[11] και από τη στοιχειωδέστερη έστω γεωμετρία των σχημάτων. Αναπήδησαν πάλι, μετά από τα τρίγωνα, στο πρόβλημα του κύκλου. Ο λόγος μεταξύ της περιφερείας ενός κύκλου και της διαμέτρου του είναι πράγματι ένας ασύμμετρος αριθμός - 3,14159... - τον όποιο αποκαλούμε και γράφουμε π (πιθανότατα από το πρώτο γράμμα της ελληνικής λέξεως *περιφέρεια*). Οι Έλληνες δεν είχαν αναγνωρίσει την πλήρη έκταση της ασυμμετρίας του π κι έτσι έχασαν πολύ χρόνο και κατέβαλαν μεγάλες προσπάθειες για να λύσουν το τεράστιο πρόβλημα που ήταν άλυτο εξ αιτίας αυτής ακριβώς της ασυμμετρίας — δηλαδή να κατασκευάσουν ένα τετράγωνο, το εμβαδόν του οποίου να ισούται με το εμβαδόν ενός δεδομένου κύκλου, με άλλα λόγια να πετύχουν τον «τετραγωνισμό του κύκλου».

Μια σχολή πού ιδρύθηκε στην Ελέα, πόλη γειτονική στον Κρότωνα, ήταν οι «**Ελεάτες**». Οι Ελεάτες εξ' αρχής φάνηκαν ν' αντιμάχονται τους Πυθαγορείους. Αυτό που τώρα, αναδρομικά, μας φαίνεται σαν μια ήρεμη και ανεμπόδιστη πορεία προς τη διαρκώς αυξανόμενη γνώση, στην πραγματικότητα ήταν ένας πνευματικός πόλεμος με όλο το πάθος και την οξύτητα των αντεγκλήσεων. Τα όπλα στις μάχες αυτές ήταν τα περίπλοκα επιχειρήματα· το έπαθλο, ο θρίαμβος της αποδείξεως. Οι Ελεάτες είχαν βαθύτατα επιστημονικά ενδιαφέροντα, όχι μόνο για τα τρίγωνα και τους κύκλους, αλλά και για το σύμπαν. Ο κυριότερος εκπρόσωπος τους ήταν ο **Ζήνων**, διδάσκαλος του περίπλοκου διανοήματος του παραδόξου, δηλαδή της προτάσεως εκείνης που, αν και - λογικά - είναι γερά θεμελιωμένη, αντιφάσκει με την κοινή αντίληψη. Την ίδια περίπου εποχή που ο Εύδοξος αντιμαχόταν στο σημείο αυτό τους Ελεάτες και το άπειρο, ο αρχαίος ελληνικός κόσμος γνώριζε το Μέγα Αλέξανδρο. Από τις κατακτήσεις του μεγάλου κατακτητή ιδρύθηκε η νέα πολιτιστική πρωτεύουσα του κόσμου: η Αλεξάνδρεια.

Εκεί, γύρω στα 300 π.Χ., ο περιφημότερος απ' όλους τους διδασκάλους της γεωμετρίας, ο **Ευκλείδης**, βάλθηκε να συγκεντρώσει όλα τα θεωρήματα των προγενεστέρων του και να τα συμπεριλάβει σε μια μοναδική, αυτοτελή ενότητα.[12] Ο Ευκλείδης δεν ήταν ακριβώς ένας μεγάλος καινοτόμος· ήταν όμως ένας υπέροχος οργανωτής που συστηματοποίησε τα συμπεράσματα στα οποία έφθασαν ο Θαλής, ο Εύδοξος και άλλες φωτεινές διάνοιες της χρυσής εποχής της ελληνικής γεωμετρίας - άνδρες πού επέζησαν ως τις μέρες μας περισσότερο σαν ονόματα και ολιγότερο με το έργο τους, όπως ο **Δημόκριτος**, ο **Ιπποκράτης της Χίου**, ο **Αρχύτας**. Ο Ευκλείδης είχε τη θαυμαστή ικανότητα ν' ανασυντάξει τις αποδείξεις των θεωρημάτων σε σύντομους αυστηρούς όρους. Έτσι απλοποιημένες οι αποδείξεις περιελήφθησαν στο αριστούργημα του, τα ***Στοιχεία***, ένα από τα ανεπανάληπτα εκείνα έργα που, όπως η

[10] [8] σελ 114
[11] [8] σελ 133
[12] [8] σελ 117 «Στοιχεία»

Βίβλος, έχουν αφομοιώσει σ' ένα εμπνευσμένο σύνολο τις καλύτερες προσπάθειες ολοκλήρων γενεών δημιουργικής σκέψεως. Είναι ένα κείμενο με τόση σαφήνεια και κομψότητα ύφους ώστε πολλοί εκπαιδευτικοί το θεωρούν σαν την συνεκτικότερη συλλογή αυστηρά λογικών διανοημάτων που πραγματοποίησε ποτέ ο άνθρωπος. Στην αρχαιότητα, κυκλοφορούσε ευρύτατα με τη μορφή χειρογράφου. Αφότου ανεκαλύφθη η τυπογραφία δημοσιεύθηκε σε χιλιάδες εκδόσεις. Μέχρι προ 100 ετών, ήταν στις περισσότερες χώρες του κόσμου το κλασικό σύγγραμμα για τη διδασκαλία της γεωμετρίας και παραμένει, ακόμη και σήμερα, ξαναγραμμένο με ποικίλους τρόπους. Τα *Στοιχεία* περιλαμβάνουν 13 βιβλία ή κεφάλαια, που περιγράφουν και αποδεικνύουν ένα μεγάλο μέρος απ' όσα γνωρίζει, ακόμη και τώρα, το ανθρώπινο γένος για τις γραμμές, τα σημεία, τους κύκλους και τα στοιχειώδη σχήματα των στερεών σωμάτων. Όλες αυτές τις πληροφορίες τις άντλησε ο Ευκλείδης, με την πιο κοφτερή λογική, από δέκα ακριβώς απλές προτάσεις, πέντε αξιώματα και πέντε θεωρήματα. Οι παρατηρήσεις του για τους πρώτους αριθμούς, τους αριθμούς πού δεν μπορούν να διαιρεθούν ακριβώς παρά μόνο με τον εαυτό τους ή με το 1, είναι σήμερα κλασσικές για τη «**θεωρία των αριθμών**».

Μετά τον Ευκλείδη, οι μαθηματικοί δεν μπορούσαν παρά να προχωρήσουν πέρα από την περιοχή πού συνήθως τη σκεφτόμαστε σαν ελληνική γεωμετρία, προς τα ανώτερα μαθηματικά. Εμπνευσμένοι από τα *Στοιχεία* οι δύο περισσότερο προικισμένοι μαθηματικοί του επομένου αιώνα πραγματοποίησαν τόσες ανακαλύψεις και διετύπωσαν τόσους πολύτιμους τύπους όσους είχαν δημιουργήσει όλοι μαζί οι Έλληνες πριν από τον Ευκλείδη. Ο ένας από αυτούς ήταν ο **Απολλώνιος**, του οποίου οι ανακαλύψεις γύρω από τις λεγόμενες «κωνικές τομές» συνέβαλαν αποφασιστικά στην Αστρονομία, στη Βλητική και, σε τελική προέκταση, στη σύγχρονη μελέτη των πυραυλικών τροχιών. Ο άλλος υπήρξε ο **Αρχιμήδης**, του οποίου η μαθηματική ιδιοφυΐα συναγωνιζόταν το ταλέντο του ως μηχανικού, με το όποιο καθιερώθηκε σαν ο πατέρας της Πρακτικής Μηχανικής. Στους επόμενους αιώνες, όταν η ρωμαϊκή αυτοκρατορία κλονιζόταν οργανικά και πνευματικά, μερικοί Έλληνες προσπάθησαν να επαναφέρουν στη ζωή το Αρχιμήδειο πνεύμα της δημιουργικής εκείνης. Από τους φορείς του πνεύματος αυτού υπήρξε μια γυναίκα, η Υπατία, πού δίδαξε στην Αλεξάνδρεια περί το 400 μ.χ. Ήταν μία θαυμάσια μαθηματικός και το κάλλος της συναγωνιζόταν την ικανότητα της στην επιστήμη. Οι μαθητές παρακολουθούσαν κατά εκατοντάδες τις παραδόσεις της. Δυστυχώς γι' αυτήν, παρέμεινε πιστή στις ελληνικές ειδωλολατρικές παραδόσεις, κι έτσι σκοτώθηκε άγρια από έναν όχλο αιρετικών χριστιανών. Με την άνοδο της Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας, κλείνει ο κύκλος της Αρχαίας Ελληνικής περιόδου. Οι Ρωμαίοι ασχολήθηκαν μόνο με πρακτικά μαθηματικά που αφορούσαν κατασκευές και εμπόριο.

Τα μαθηματικά στο Μεσαίωνα και την Αναγέννηση

Με την πτώση της Δυτικής Ρωμαϊκής Αυτοκρατορίας, το σκοτάδι απλώνεται στη Δυτική Ευρώπη. Όχι μόνο δεν μπορούμε να μιλάμε για ανάπτυξη των θετικών επιστημών αλλά έχουν πια χαθεί και στοιχειώδεις γνώσεις. Οι λιγοστοί ερευνητές πέφτουν συνήθως θύματα του άγριου κυνηγητού ηγετών της Εκκλησίας, που γεμάτοι αντιεπιστημονική προκατάληψη εναντιώνονται σε οτιδήποτε δεν αναφέρεται στα Ιερά Κείμενα. Αλλά και στο Βυζάντιο δεν μπορούμε να μιλήσουμε για ανάπτυξη των θετικών επιστημών. Οι μελετητές του Βυζαντίου ακολουθούν σχεδόν αποκλειστικά θεολογικές-θεωρητικές κατευθύνσεις. Αμυδρές αντανακλάσεις των θετικών επιστημών παρουσιάζονται με κάποια μικρής σχετικά σημασίας τεχνολογικά επιτεύγματα (π.χ. το "υγρό πυρ" των βυζαντινών).

Οι Ινδοί που συνέχισαν τη Βαβυλωνιακή παράδοση δημιουργούν μια δική τους σχολή. Παρόλο που στην δική τους παρουσίαση λείπει η έννοια του θεωρήματος και της απόδειξης, κατάφεραν σημαντικά επιτεύγματα στην Άλγεβρα και στην Τριγωνομετρία. Υπολόγισαν προσεγγιστικά το π (**Aryabhata**), εισήγαγαν το *μηδέν* (**Brahmagupta**), και τους αρνητικούς (**Bhaskara**). Το μεγαλύτερο όμως βήμα των Ινδών ήταν το δεκαδικό σύστημα θέσης που παραμένει μέχρι σήμερα.[13]

Οι Άραβες, που κατάφεραν να κυριαρχήσουν από τον 7^{ο} μ.χ. αιώνα σε μια ολόκληρη περιοχή ανατολικά της Ελλάδας, έγιναν δέκτες των γνώσεων Βαβυλωνίων, Ελλήνων και Ινδών. Η επιστήμη μπορεί να μην προόδευσε πολύ εξαιτίας τους αλλά ήταν κατά κάποιο τρόπο οι βιβλιοθηκάριοι της ιστορίας αφού κατάφεραν να διασώσουν πάρα πολλά από τα συγγράμματα της αρχαιότητας, τα πρωτότυπα των οποίων έχουν χαθεί. Ο **Al-Khowarizmi** στη Θεωρία Αριθμών, ο **Omar Khayam** στις πολυωνυμικές εξισώσεις 3^{ου} βαθμού και ο **Nasir al Din al Tusi** στη Γεωμετρία ήταν οι κυριότεροι Άραβες μαθηματικοί της εποχής.

Ο 12^{ος} αιώνας για τα μαθηματικά, ήταν ένας αιώνας που δεν έχει να αναδείξει σπουδαία επιτεύγματα˙ κυρίως μεταφράσεις αρχαιοελληνικών συγγραμμάτων. Στο ίδιο μοτίβο και ο 13^{ος} αιώνας όπου βέβαια ιδρύθηκαν πολλά Ευρωπαϊκά πανεπιστήμια και ουσιαστικά δημιουργήθηκε η πανεπιστημιακή κοινότητα. Ο **Fibonacci** ήταν η μορφή που ξεχώρισε εκείνη την εποχή. Ο 14^{ος} αιώνας μπορεί να χαρακτηριστεί ως «ο αιώνας της Πανώλης». Περίπου ένας στους τρεις Ευρωπαίους πέθανε εξαιτίας της, οπότε πολλά περιθώρια για Μαθηματική αναζήτηση και πρόοδο δεν υπήρχαν.

Ο 15^{ος} αιώνας είναι ο αιώνας που ξεκίνησε η Αναγέννηση. Η Βυζαντινή αυτοκρατορία έπεσε και οι Βυζαντινοί φεύγοντας παίρνουν μαζί τους την Αρχαία Ελληνική κληρονομιά. Σχεδόν ταυτόχρονα, η τυπογραφία ανακαλύπτεται και μαζί της ο κόσμος ανακαλύπτει πληθώρα συγγραμμάτων που μέχρι τότε ήταν προσβάσιμα μόνο σε λίγους. Αυτό και μόνο το γεγονός αρκεί για να δώσει ώθηση σε όλες της επιστήμες˙ και στην Τέχνη. Σπουδαίοι Μαθηματικοί εμφανίζονται στο προσκήνιο. **Cardano**, **Pacioti**, **Tartaglia**, **Ferrari** και **Viette** λύνουν εξισώσεις 3^{ου} και 4^{ου} βαθμού ακόμα και με χρήση τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Μια νέα άνοιξη έχει έρθει.

Τα Μαθηματικά της σύγχρονης εποχής

Το 17^{ο} αιώνα συντελείται στην Ευρώπη μια σημαντική άνθηση των επιστημών. Εμφανίζονται νέοι τρόποι μελέτης των στοιχειωδών Μαθηματικών και καινούργιες μέθοδοι και εργαλεία υπολογισμού. Ο **Napier** εισάγει τους λογάριθμους, ο **Descartes** ενοποιεί την Άλγεβρα με τη Γεωμετρία στην Αναλυτική του Γεωμετρία, ο **Fermat** έμεινε στην ιστορία για τη θεμελίωση της Θεωρίας Αριθμών και μαζί με τον **Pascal** της Θεωρίας των Πιθανοτήτων. Το μεγαλύτερο όμως επίτευγμα του αιώνα αποτελεί η ταυτόχρονη ανακάλυψη του Απειροστικού Λογισμού από **Newton** και **Leibniz**. Ο κλάδος αυτός, που χρησιμοποιεί έννοιες απειροστών στους υπολογισμούς, θα δώσει νέα ώθηση στη Φυσική, που με τη σειρά της θα «απαιτήσει» νέα Μαθηματικά.

[13] [8] σελ 83

Ο αιώνας αυτός αποτελεί την «ηρωική εποχή των Μαθηματικών». Οι μαθηματικοί κατάφεραν μεγαλειώδεις ανακαλύψεις. Ο μεγαλύτερος μαθηματικός της περιόδου αυτής και παραγωγικότερος όλων των εποχών είναι ο **Euler** που συμβάλλει στην Τριγωνομετρία και τη Θεωρία Αριθμών, ενώ ανακαλύπτει το Λογισμό των Μεταβολών και τη Διαφορική Γεωμετρία. Άλλοι μεγάλοι μαθηματικοί του αιώνα είναι ο **D' Alembert** που προχώρησε το Λογισμό και τις διαφορικές εξισώσεις, ο **Lagrange** που τελειοποίησε την Ανάλυση, ανοίγοντας το δρόμο για μια σύγχρονη Θεωρία Συναρτήσεων, ο **Monge** που μελέτησε την Αναλυτική και Διαφορική Γεωμετρία των καμπυλών στο χώρο, ίδρυσε την Παραστατική Γεωμετρία και εγκαινίασε την Ecole Polytechnique και ο **Laplace** που προσέφερε στη Θεωρία των Πιθανοτήτων και χρησιμοποίησε τα Μαθηματικά για να προωθήσει την Αστρονομία και την Ουράνια Μηχανική. Τον $18^{ο}$ αι. έχουμε τεράστια παραγωγή Μαθηματικών, χωρίς όμως να υπάρχει παράλληλα και βαθύτερη κατανόηση των εννοιών που πραγματεύονταν. Οι αποδείξεις βασίζονταν στη διαίσθηση και τη μεταφυσική που είχαν αντικαταστήσει σχεδόν πλήρως τη λογική, με συνέπεια την εμφάνιση αρκετών αντιφάσεων και παραδόξων. Η μεγάλη διεύρυνση του μαθηματικού οικοδομήματος και η εμφάνιση παραδοξοτήτων θα οδηγήσει σε μια ποιοτική αλλαγή τον επόμενο αιώνα.

Με το τέλος του $18^{ου}$ αιώνα, έχει ήδη στηθεί το σκηνικό για την επανάσταση που θα συντελεστεί στα μαθηματικά τον $19^{ο}$ αιώνα, γνωστό και ως «χρυσό αιώνα των Μαθηματικών». Η βιομηχανική άνθηση και η ανάγκη ισχυρών θεμελίων του μαθηματικού οικοδομήματος θα βοηθήσουν στο να συντελεστούν καθοριστικές αλλαγές, που θα απελευθερώσουν την Άλγεβρα και τη Γεωμετρία. Η ανακάλυψη της μη-Ευκλείδειας Γεωμετρίας από **Lobachevsky**, **Bolyai** και **Gauss** αποτελεί ίσως το πιο αξιοσημείωτο γεγονός του αιώνα. Ο **Cauchy** και ο **Weierstrass** θεμελιώνουν την Ανάλυση και θέτουν τις βάσεις για την αριθμητικοποίηση της. Ο **Galois** και ο **Abel** θα ανακαλύψουν τη Θεωρία Ομάδων, ο **Hamilton** τη μη-αντιμεταθετική Άλγεβρα την οποία ο **Cayley** θα επεκτείνει στους πίνακες και ο **Boole** θα ανοίξει το δρόμο στη μαθηματικοποίηση της Λογικής. Ο **Riemann** θα ανακαλύψει τη δική του μη-Ευκλείδεια, Ελλειπτική Γεωμετρία και θα συμβάλλει καθοριστικά στη Θεωρία Ολοκλήρωσης, ενώ οι **Poincaré**, **Beltrami** και **Klein** θα αποδείξουν και θα θεμελιώσουν τις νεόκοπες μη-Ευκλείδειες γεωμετρίες . Ο **Gauss**, ένας από τους μεγαλύτερους μαθηματικούς όλων των εποχών, θα δώσει ώθηση στην Άλγεβρα, τη Διαφορική Γεωμετρία, την Ανάλυση και τη Θεωρία Αριθμών. Προς το τέλος του αιώνα, ο **Cantor** θα μας προσφέρει την αξιοθαύμαστη Θεωρία Συνόλων και θα «αγγίξει» το άπειρο με τους υπερπεπερασμένους αριθμούς, ενώ οι **Dedekind** και **Peano,** συνεχίζοντας το έργο του **Weierstrass**, θα θέσουν τα θεμέλια των φυσικών και των πραγματικών αριθμών. Πλέον η «αυστηροποίηση» των Μαθηματικών είχε ξεκινήσει και τα «εργαλεία» για την περαιτέρω μελέτη των θεμελίων τους τα επόμενα χρόνια, είχαν ανακαλυφθεί.

Ο $20^{ος}$ αιώνας ξεκίνησε με τον **Hilbert** να θέτει 23 άλυτα προβλήματα ως βάση για περαιτέρω ανάπτυξη των Μαθηματικών. Ο ίδιος και οι συνεχιστές του, προσπάθησαν να τυποποιήσουν και να θεμελιώσουν αυστηρά όλο το μαθηματικό οικοδόμημα μέσω της «τυπικής αξιωματικής μεθόδου», εγκαινιάζοντας τη φιλοσοφική σχολή του Φορμαλισμού. Την ίδια περίοδο ο **Poincaré** θεμελιώνει τη Γενική Τοπολογία και θέτει τις βάσεις για τη μετέπειτα φιλοσοφική σχολή του Ιντουισιονισμού. Ο **Russell** προσπαθεί να στηρίξει τα Μαθηματικά στη Λογική (σχολή του Λογικισμού) και με το παράδοξό του (σε ελεύθερη γραφή: ένας Κρητικός που ισχυρίζεται ότι όλοι οι Κρητικοί λένε ψέματα τελικά λέει αλήθεια η ψέματα;) κλονίζει τη Θεωρία Συνόλων. Θα είναι όμως ο **Gödel**, αυτός που θα δημιουργήσει μια κρίση ανάλογη και μεγαλύτερη από αυτήν των ασύμμετρων στην αρχαία Ελλάδα, με την απόδειξη της μη-πληρότητας των αξιωματικών συστημάτων. Στο εξής, τα Μαθηματικά και η φιλοσοφία τους δε θα είναι ποτέ ξανά τα ίδια. Τα παράδοξα και η μη-πληρότητα θα αποτελέσουν την αφορμή για νέες μαθηματικές θεωρίες, όπως η Θεωρία Τόπων, η Θεωρία Κατηγοριών, η Θεωρία Απόδειξης και η Θεωρία Μοντέλων. Ο **Turing** και ο **Von Neumann** έθεσαν τις βάσεις για την κατασκευή των ηλεκτρονικών υπολογιστών που αποτέλεσαν τη μεγάλη επιστημονική επανάσταση του 20^{ου} αιώνα. Με την άνθηση της πληροφορικής, έχουμε μια στροφή από τα «συνεχή» στα «διακριτά» Μαθηματικά (Θεωρία Γραφημάτων, Συνδυαστική Θεωρία...) και παράλληλα την ανάπτυξη της Θεωρίας της Πολυπλοκότητας και των fractals (μορφοκλασματικά σύνολα). Το τέλος του 20^{ου} και η αυγή του 21^{ου} αιώνα βρίσκει τη μαθηματική επιστήμη να προσανατολίζεται προς τις αντίστοιχες ανθρωπιστικές και κοινωνικές (ψυχολογία, κοινωνιολογία, κ.α.) και οι νέοι κλάδοι των ολιστικών, μη-Καντοριανών Μαθηματικών, που εγκαινιάζονται για το σκοπό αυτό, χαράζουν την μελλοντική της πορεία.

Η φύση των Μαθηματικών

Το κεντρικό ερώτημα που σχετίζεται με τα μαθηματικά αντικείμενα είναι: **«τελικά ο άνθρωπος ανακαλύπτει τα μαθηματικά αντικείμενα που προϋπάρχουν ή τα κατασκευάζει ό ίδιος;»** Έχει δηλαδή η φύση νόμους σταθερούς, αξίες αναλλοίωτες που ο άνθρωπος παρατηρεί και καταγράφει, διαχρονικά αμετάβλητες σταθερές που υπάρχουν και εμείς απλά μένει να τις ανακαλύψουμε και να τις αναλύσουμε; Ή μήπως όλα είναι ανθρώπινες εφευρέσεις; Κατασκευές που υπάρχουν στο μυαλό αυτού που τις δημιουργεί και που απλά είναι εργαλεία που ο επόμενος θα αποδεχθεί, θα επεξεργασθεί και θα οδηγηθεί στην επόμενη έννοια συνεχίζοντας την αλυσίδα των ανακαλύψεων ;

Ερωτήματα στα οποία πολλοί απάντησαν με τον έναν ή τον άλλο τρόπο, αποδεχόμενοι την μία ή την άλλη άποψη. Αλλά υπάρχει απάντηση; Εννοώ, σωστή απάντηση. Η επιστήμη προοδεύει χάρη στην ανθρώπινη προσπάθεια. Οι Μαθηματικοί τραβάνε το κουπί που σπρώχνει την επιστήμη τους να προοδεύει. Η απάντηση λοιπόν είναι στο μυαλό του καθενός. Εδώ νομίζω ταιριάζει η άποψη ότι «ο τυπικός μάχιμος μαθηματικός είναι Πλατωνιστής τις καθημερινές και Φορμαλιστής τα σαββατοκύριακα. Αυτό σημαίνει πως, όταν ασχολείται με τα μαθηματικά, είναι πεπεισμένος πως καταπιάνεται με μια αντικειμενική πραγματικότητα της οποίας προσπαθεί να καθορίσει τις ιδιότητες. Αλλά, όταν προκαλείται να δώσει μια φιλοσοφική ερμηνεία γι' αυτήν την πραγματικότητα, το βρίσκει πιο εύκολο να προσποιηθεί ότι τελικά δεν πιστεύει σε αυτήν.» [14]

Οι Πυθαγόρειοι τοποθέτησαν τους αριθμούς πάνω από την ανθρώπινη παρέμβαση. Ο Πλάτωνας, επηρεασμένος από αυτούς, θεώρησε τα μαθηματικά αντικείμενα αιώνια και αναλλοίωτα.[15] Υποστήριξε ότι τα αντικείμενα της γνώσης, τα αντικείμενα που θα μπορούσαν να οριστούν, υπήρχαν αλλά δεν έπρεπε να ταυτιστούν με τίποτε στον αισθητό κόσμο. Υπήρχαν σε έναν ιδανικό κόσμο, πέραν χώρου και χρόνου. Είναι οι περίφημες πλατωνικές «Ιδέες».

[14] [10] σελ 309
[15] [9] σελ 138

Στον αντίποδα, οι ιδεαλιστές,[16] οι εμπειριστές,[17] οι νομιναλιστές,[18] οι ιντουισιονιστές[19] και οι υπέρμαχοι του Κονστρουκτιβισμού[20] και των Θεωριών του Ενσώματου Νου. Οι Ιδεαλιστές θεωρούν ότι τα μαθηματικά αντικείμενα υπάρχουν αλλά εξαρτώνται από τον ανθρώπινο νου, είτε του καθενός μαθηματικού ξεχωριστά, είτε αποτελούν τμήμα της κοινής διανοητικής διάρθρωσης του ανθρώπινου είδους. Οι Εμπειριστές υποστηρίζουν ότι τα αντικείμενα αυτά προέρχονται από την «αφαίρεση» του υλικού υποστρώματος των φυσικών αντικειμένων, που παρατηρούμε και γνωρίζουμε μέσω των αισθήσεών μας. Οι Νομιναλιστές πρεσβεύουν ότι τα μαθηματικά αντικείμενα είναι απλά γλωσσολογικές κατασκευές ή, στην ακραία τους εκδοχή, ότι τα αντικείμενα αυτά δεν υπάρχουν καθόλου. Τέλος οι Ιντουϊσιονιστές, οι Κονστρουκτιβιστές και οι υποστηρικτές της Θεωρίας του Ενσώματου Νου, μίλησαν για μαθηματικά αντικείμενα που είναι καθαρά νοητικές κατασκευές και δεν υπάρχουν υπό οποιαδήποτε πραγματική έννοια, παρά μόνο μέσα στο ανθρώπινο μυαλό. Ο Ιντουϊσιονισμός υποστηρίζει ότι μόνο προβλέψεις μπορούμε να κάνουμε για τα μαθηματικά αντικείμενα και όχι τελικές κρίσεις γι' αυτά, αφού αυτό που γνωρίζουμε πχ. για το σύνολο των φυσικών αριθμών είναι η διαδικασία κατασκευής του βήμα προς βήμα και όχι το σύνολο ως ολότητα. Είναι αυτό που ο Hilbert αποκαλεί "μερική κρίση". "Η πραγματικότητα δεν είναι τίποτε άλλο από συλλογική διαίσθηση" (L. Tomlin).

Στα πλαίσια της Ιντουϊσιονιστικής θεωρίας η οποία αρνείται οτιδήποτε δεν γίνεται αντιληπτό από τις αισθήσεις και την εμπειρία μας, πολλά από τα βασικότερα εργαλεία των μαθηματικών που συνήθως χρησιμοποιούμε χάνουν την εγκυρότητα τους αφού πολλές αποδείξεις παύουν να ισχύουν. Για παράδειγμα, οι αποδείξεις που βασίζονται στην εις άτοπον απαγωγή δεν είναι πια έγκυρες. Η δίτιμη αριστοτέλεια λογική σύμφωνα με την οποία κάτι είναι ψευδές ή λάθος και η οποία βασίζεται στον νόμο αποκλεισμού του τρίτου παύει να ισχύει αφού κανείς δεν μπορεί να μας διαβεβαιώσει ότι δεν υπάρχει και μια τρίτη πιθανή τιμή αληθείας. Έτσι, στα πλαίσια του Ιντουισιονισμού, έγκυρες θεωρούνται μόνο οι κατασκευαστικές αποδείξεις. Υπαρκτό για τους Ιντουισιονιστές σημαίνει κατασκευαστικά υπαρκτό και πεπερασμένα ελέγξιμο. Οποιαδήποτε άλλη απόδειξη ύπαρξης δεν είναι αποδεκτή. Για τους Ιντουισιονιστές, δεν απαιτείται κάποιο θεώρημα πληρότητας - τουλάχιστον στην μορφή του κλασικού θεωρήματος του Gödel - για τη δικαίωση της Ιντουϊσιονιστικής πρακτικής. Η ίδια η ιντουϊσιονιστική πρακτική είναι ο φορέας αληθείας της με τις πεπερασμένα ελέγξιμες αποδείξεις της που στηρίζονται στην διαισθητική έννοια των φυσικών αριθμών. (Ο Brower, όπως και ο Kant, πίστευε στην διαίσθηση του χρόνου από την οποία προκύπτει η διαίσθηση του φυσικού αριθμού).

Δεν είναι εύκολο να πούμε ότι το τοπίο έχει ξεκαθαρίσει εντελώς μέχρι σήμερα. Οι πιο σύγχρονες απόψεις λένε ότι τα Μαθηματικά αντικείμενα είναι κατασκευασμένα μοντέλα που υπάρχουν κυρίως σαν προϊόντα της ανθρώπινης εφευρετικότητας. Εξάλλου ακόμα και η πραγματικότητα δεν είναι κάτι αμετάβλητο και διαχρονικό. Βέβαια, κάποιες μαθηματικές ιδέες υπάρχουν στη φύση διαχρονικά. Αλλά και πάλι δεν είναι εύκολο να εμφανιστούν μοντέλα που διαχρονικά θα μπορούν να λύνουν το ίδιο πρόβλημα. "**Στο βαθμό που οι προτάσεις των μαθηματικών δίνουν μια περιγραφή της πραγματικότητας δεν είναι βέβαιες και στο βαθμό που είναι βέβαιες, δεν περιγράφουν την πραγματικότητα**" (A. Einstein, 1921)

---

[16] [2] σελ 25
[17] [2] σελ 74
[18] [2] σελ 26
[19] [2] σελ 8
[20] [2] σελ 184

<u>Αντικειμενικές ή όχι;</u>

Για αιώνες η γνώση θεωρείτο απόλυτη. Το σύνολο σχεδόν των επιστημόνων ήταν υπέρ της άποψης αυτής. Η λογική ήταν το πρότυπο πάνω στο οποίο στηρίχτηκαν όλοι - όχι μόνο οι μαθηματικοί - για να θεμελιώσουν προτάσεις και θεωρήματα. Τα παράδοξα όμως που εμφανίστηκαν, από την αρχαιότητα κιόλας, θόλωναν τις αντιλήψεις αυτές. Η μη-πληρότητα του Gödel άλλαξε ριζικά τις απόψεις. Ο Πλάτωνας ήταν ο πρώτος που μίλησε περί απόλυτης και αιώνιας μαθηματικής γνώσης, άποψη που υποστήριξαν και οι Descartes, Leibniz και Kant. Η ανακάλυψη των μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών το 19^{ο} αιώνα απέδειξε ότι η αλήθεια στα Μαθηματικά μπορεί να έχει πολλές όψεις. Ουδείς, πάντως, αμφισβητούσε την αλήθεια των αποδεδειγμένων μαθηματικών προτάσεων. Ειδικά οι υπέρμαχοι των τριών μεγάλων φιλοσοφικών σχολών του Λογικισμού, του Φορμαλισμού και του Ιντουισιονισμού[21], προσπάθησαν να δομήσουν τα Μαθηματικά έτσι ώστε να μην υπάρχουν αντιφάσεις και παράδοξα και κάθε αποδεδειγμένη αλήθεια να είναι πέρα και πάνω από κάθε αντιλογία.

Οι Αντιρρεαλισμός, υποστηρίζει ότι ακόμα και να υπάρχουν αληθοτιμές στις μαθηματικές προτάσεις, αυτές εξαρτώνται από το μαθηματικό, είτε από την ατομική του αντίληψη, είτε από την ανθρώπινη νοητική δραστηριότητα εν γένει[22]. Ο Shapiro ξεκαθαρίζει ότι, στην Αντιρρεαλιστική θέση, δεν αποφασίζουμε αν μια πρόταση είναι αληθής ή ψευδής αλλά κατασκευάζουμε προτάσεις αληθείς ή ψευδείς, γιατί με κάποιο τρόπο ο νους μας είναι δομημένος από τη μαθηματική αλήθεια[23]. Οι αντιρρεαλιστές πιστεύουν είτε σε μια μη δίτιμη (ίσως Ιντουϊσιονιστική) λογική, είτε ότι ο ανθρώπινος νους δεν μπορεί να προσδιορίσει την αλήθεια των μαθηματικών προτάσεων. Κοντά στην τελευταία άποψη είναι και ο Κονστρουκτιβισμός και η Θεωρία της Διαψευσιμότητας των Popper και Lakatos. Γι' αυτούς οι μαθηματικές αλήθειες έχουν εμπειρική βάση, είναι επισφαλείς κι επιδέχονται αμφισβήτησης και ανασκευής. Η άποψη αυτή κέρδισε και κερδίζει όλο και περισσότερους υποστηρικτές τα τελευταία χρόνια, καθώς τα θεωρήματα της μη-πληρότητας του Gödel και η αρχή της απροσδιοριστίας του Heisenberg μας κατέστησαν σαφή τα όρια της ανθρώπινης γνώσης[24].

Αν κάποιος επιχειρήσει να κάνει έναν συγκερασμό των παραπάνω απόψεων και να δώσει έναν ορισμό για τα Μαθηματικά θα βρεθεί σε δύσκολη θέση. Οι Davis και Hersh, σε έναν εισαγωγικό ορισμό, χαρακτηρίζουν τα Μαθηματικά ως την «επιστήμη της ποσότητας και του χώρου»[25].

Με μια απλή αναζήτηση στο διαδίκτυο ορισμοί υπάρχουν πολλοί. Μεταφέρω χαρακτηριστικά τα εξής: *«Τα Μαθηματικά είναι η επιστήμη που μελετά την ποσότητα (δηλαδή τους αριθμούς), τη δομή (δηλαδή τα σχήματα), το διάστημα, τη μεταβολή και τις σχέσεις όλων των μετρήσιμων αντικειμένων της πραγματικότητας και της φαντασίας μας. Οι Μαθηματικοί περιγράφουν τις σχέσεις με τύπους ή και αλγόριθμους και ερευνούν την αλήθεια τους με αποδεικτική διαδικασία λογικών βημάτων που στηρίζονται σε αξιώματα και θεωρήματα· Οι μαθηματικοί ερευνούν αυτές τις δομές και προσπαθούν να σχηματίζουν υποθέσεις και να εξακριβώνουν την αλήθεια τους μέσω*

---

21 Οι λογικιστές προσπάθησαν να εγκαθιδρύσουν την απόλυτη βεβαιότητα στα Μαθηματικά μέσω της λογικής, οι ιντουισιονιστές να αποδείξουν την αλήθεια με κατασκευαστικές μεθόδους και οι φορμαλιστές να απαλλάξουν από την ασυνέπεια τα τυπικά θεωρήματα που αντιπροσωπεύουν τη μαθηματική αλήθεια.

22 Στην ακραία μορφή αντιρεαλισμού οι μαθηματικές προτάσεις δεν έχουν αληθοτιμή. (βλ. [2] σελ. 35-36)

23 [2] σελ 34-35

24 Για τον ημιεμπειρικισμό του Lakatos και την μη-απόλυτη μαθηματική γνώση βλ. [11] σελ 85-89

25 [9] σελ. 6

αυστηρών κανόνων συνεπαγωγής και έχοντας ως βάση ορισμένα αξιώματα και ορισμούς. Οι δομές που ερευνώνται συχνά έλκουν την προέλευσή τους από τις φυσικές επιστήμες, συνηθέστερα από τη φυσική, αλλά οι μαθηματικοί επίσης ορίζουν και ερευνούν δομές για λόγους καθαρά εσωτερικούς στα μαθηματικά, επειδή οι δομές αυτές μπορούν να παρέχουν, παραδείγματος χάριν, μια ενοποιητική γενίκευση για διάφορα υποπεδία, ή ένα χρήσιμο εργαλείο για τον λογισμό. Τελικά, πολλοί μαθηματικοί μελετούν τα μαθηματικά για καθαρά αισθητικούς λόγους, αντιμετωπίζοντας τα ως μια μορφή τέχνης περισσότερο παρά ως μια πρακτική ή εφαρμοσμένη επιστήμη.»[26].
Ενδιαφέρουσα άποψη είναι και η :
*«Φαίνεται ότι έχουμε τρεις επιλογές. Τα Μαθηματικά είναι η Ανθρωπιστική Επιστήμη που υμνεί την αιώνια λογική, είναι η Φυσική Επιστήμη η οποία μελετά το φαινόμενο που λέγεται λογική, είναι η Τέχνη που πλάθει δομές αιθερικής ομορφιάς από την πρωταρχική ύλη που ονομάζεται λογική, είναι όλα αυτά κι άλλα. Αλλά πάνω από όλα, μπορώ να σας βεβαιώσω, ότι τα **Μαθηματικά είναι Ευχαρίστηση .»***[27]

Κατά την προσωπική μου άποψη τα Μαθηματικά είναι η Τέχνη της ανακάλυψης. Συνήθως ανακαλύπτει λύσεις σε ήδη διατυπωμένα προβλήματα. Προβλήματα που ανακύπτουν στη ζωή του ανθρώπου και είναι πάσης φύσεως. Ενίοτε βέβαια, και αυτό είναι πιο ενδιαφέρον, οι μαθηματικοί έχουν λύσεις και τους μένει να ανακαλύψουν το πρόβλημα που λύνουν οι λύσεις αυτές. Στην προσπάθεια αυτή τα εργαλεία είναι η ανθρώπινη λογική και η ήδη συσσωρευμένη γνώση και εμπειρία από τις προσπάθειες των προηγούμενων. Τα μαθηματικά αντικείμενα υπάρχουν κι εμείς μένει να τα τοποθετήσουμε στη σωστή σειρά ώστε να φτάσουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα. Απόλυτη και αιώνια γνώση δεν υπάρχει.

Επίλογος

Στην εργασία αυτή έγινε μια προσπάθεια να παρουσιαστεί μια σύντομη εξέλιξη της Μαθηματικής Ιστορίας. Τα ιστορικά γεγονότα βέβαια είναι κατά κανόνα αδιαμφισβήτητα. Προσπάθεια έγινε και να συνδεθούν αυτά με το ευρύτερο κοινωνικό αλλά και επιστημονικό πλαίσιο της κάθε εποχής, ώστε να δούμε ποιες συνθήκες δημιούργησαν κάθε φορά την απαίτηση για νέα γνώση. Δόθηκε μια πρώτη αναφορά στα κυριότερα φιλοσοφικά ρεύματα που συνδέονται με την επιστήμη και στο πως αυτά επηρέασαν ή επηρεάστηκαν από τις νέες θεωρίες. Πώς «Πλατωνικοί», «Φορμαλιστές», «Ιντουϊσιονιστές» και άλλοι πάτησαν πάνω στο επιστημονικό Μαθηματικό πλαίσιο της κάθε εποχής για να στηρίξουν της απόψεις τους. Ποιες ήταν οι μεγάλες «κρίσεις» που δημιουργήθηκαν από τις νέες ανακαλύψεις ή επινοήσεις. Τέλος, οφείλω να πω ότι προσπάθησα να τις παρουσιάσω αντικειμενικά αν και σε κάποια σημεία υπεισέρχεται, θέλοντας και μη, και η προσωπική μου άποψη.

[26] http://el.wikipedia.org
[27] απαντά ο καθηγητής W.T. Tutte του πανεπιστημίου του Waterloo

Βιβλιογραφία

[1] Eves Howard, *Foundations and Fundamental Concepts of Mathematics*. Dover Publications (1997)
[2] Shapiro Stewart, *Σκέψεις για τα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών (2006)
[3] Mankiewicz Richard, *Η Ιστορία των Μαθηματικών*. Εκδόσεις Αλεξάνδρεια (2002)
[4] Δρόσος Κώστας, *Εισαγωγή στη Μαθηματική Σκέψη τόμος 1ος*. (2000)

[5] Αναπολιτάνος Διονύσιος, *Εισαγωγή στη Φιλοσοφία των Μαθηματικών*. Εκδόσεις Νεφέλη (2005)
[6] Τουμάσης Μπάμπης, *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Εκδόσεις Gutenberg (1999)
[7] Clawson Calvin, *Ο Ταξιδευτής των Μαθηματικών*. Εκδόσεις Κέδρος (2005)
[8] Wilder Raymond, *Εξέλιξη των Μαθηματικών Εννοιών*. Εκδόσεις Κουτσουμπός (1986)
[9] Davis Philip – Hersh Reuben, *Η Μαθηματική Εμπειρία*. Τροχαλία (1998)
[10] Bunt Lucas – Jones Phillip – Bedient Jack, *Οι Ιστορικές Ρίζες των Στοιχειωδών Μαθηματικών*. Εκδόσεις Γ.Α. Πνευματικού (1981)
[11] Τουμάσης Μπάμπης, *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Εκδόσεις Gutenberg (1999)
[12] Ludwig Wittgenstein, Παρατηρήσεις για την θεμελίωση των μαθηματικών. Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης. (2006)

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ