Μερικά βασικά λάθη που κάνουν μαθητές της Γ΄ Λυκείου σε ασκήσεις του Διαφορικού Λογισμού

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
πρώην Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

Πρόλογος

Στην εργασία αυτή επισημαίνονται και αναλύονται με παραδείγματα κάποια λάθη που κάνουν μαθητές της Γ΄ Λυκείου σε ασκήσεις του Διαφορικού Λογισμού. Γίνεται ειδική αναφορά σε αυτά τα λάθη επειδή είναι βασικά, δηλαδή σχετίζονται με την άμεση εφαρμογή της θεωρίας και επιπλέον παρατηρείται μεγάλη συχνότητα. Τα λάθη αυτά εντοπίζονται στην παραγώγιση μιας συνάρτησης πολλαπλού τύπου, στην εφαρμογή των κανόνων de L' Hospital και στην παραγώγιση της τετραγωνικής ρίζας μιας συνάρτησης.

Σκοπός της εργασίας είναι η ενημέρωση και ο προβληματισμός, ώστε να τονίζονται αυτά τα σημεία και να αποφεύγονται έτσι τα λάθη που παρατηρούνται στοχεύοντας στην εμπέδωση της αντίστοιχης θεωρίας από τους μαθητές.

Α. Παράγωγος συνάρτησης πολλαπλού τύπου

Θα μελετήσουμε την περίπτωση μέσα από ένα παράδειγμα.
Έχει παρατηρηθεί ότι όταν δίνουμε στους μαθητές της Γ΄ Λυκείου μια συνάρτηση πολλαπλού τύπου, η οποία στα συνοριακά της σημεία ορίζεται με τον έναν από τους δύο τύπους με τους οποίους ορίζεται εκατέρωθεν αυτών, όπως π.χ. η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}1-\sigma\upsilon\nu x, & x<0\\ \\ 2x^3-x^2+1, & x\ge 0\end{cases}$$

και ζητάμε να βρουν την παράγωγό της, τότε πολλοί μαθητές για τα συνοριακά σημεία δεν κάνουν ειδικό έλεγχο, αλλά θεωρούν ότι η παράγωγος της συνάρτησης σε αυτά τα σημεία δίνεται από την παράγωγο του αντίστοιχου τύπου. Δηλαδή για την παραπάνω συνάρτηση δίνουν:

$$f'(x)=\begin{cases}\eta\mu x, & x<0\\ \\ 6x^2-2x, & x\ge 0\end{cases}$$

Οι μαθητές αυτοί δεν έχουν συνειδητοποιήσει ότι μια συνάρτηση f πολλαπλού τύπου είναι παραγωγίσιμη σε ένα συνοριακό της σημείο x_o εάν υπάρχουν στο IR τα όρια $\lim_{x\to x_o^-}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ και $\lim_{x\to x_o^+}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ και είναι ίσα.

Άλλοι πάλι μαθητές για να εξετάσουν αν μια συνάρτηση f πολλαπλού τύπου είναι παραγωγίσιμη σε ένα συνοριακό της σημείο x_o ενεργούν ως εξής:
Αρχικά βρίσκουν τις παραγώγους συναρτήσεις στα πλευρικά διαστήματα του x_o (ανοικτά στο x_o). Δηλαδή για την παραπάνω συνάρτηση βρίσκουν τις παραγώγους:

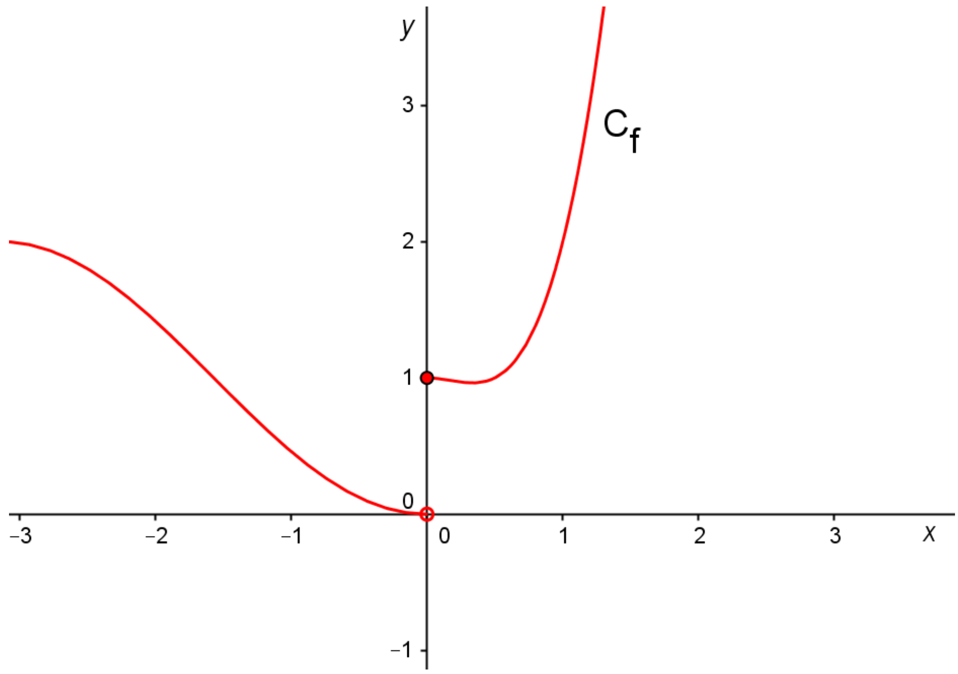
$$f'(x)=\eta\mu x,\ x<0 \qquad \text{και} \qquad f'(x)=6x^2-2x,\ x>0.$$

Στη συνέχεια βρίσκουν (αν υπάρχουν) τα όρια των παραγώγων αυτών στο x_o. Δηλαδή για τη συνάρτηση που μελετάμε βρίσκουν:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\eta\mu x=0 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}(6x^2-2x)=0\,.$$

Αν τα δύο όρια υπάρχουν στο IR και είναι ίσα συμπεραίνουν ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και στο x_o, διαφορετικά όχι. Δηλαδή για την παραπάνω συνάρτηση συμπεραίνουν ότι $f'(0)=0$.

Είναι φανερό ότι ο τρόπος συμπερασμού και στις δύο περιπτώσεις δεν είναι σωστός. Αυτό φαίνεται καθαρά και από τη συνάρτηση που μελετάμε, η οποία, όπως μπορούμε να δούμε και από τη γραφική της παράσταση που ακολουθεί[1], δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, αφού δεν είναι συνεχής στο 0.



Οι μαθητές που κάνουν το δεύτερο λάθος νομίζω ότι παρασύρονται από το εξής: Τυχαίνει να έχουν λύσει ασκήσεις με συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει αυτό που κάνουν και έτσι το γενικεύουν. Αυτό που κάνουν ισχύει όταν ικανο-

[1] Καλό είναι όταν είναι εφικτό να υποστηρίζουμε τα συμπεράσματα και εποπτικά, διότι η εποπτεία διεγείρει την ενόραση και η ενόραση βοηθά πολύ στην κατανόηση των εννοιών και των σχέσεων.

ποιείται η υπόθεση του παρακάτω θεωρήματος, το οποίο όμως οι μαθητές δε γνωρίζουν γιατί δεν διδάσκεται.

<u>Θεώρημα[2]:</u> Έστω μία συνάρτηση f, η οποία ορίζεται σε ένα διάστημα Δ και για ένα εσωτερικό σημείο x_o του Δ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα (x_o-δ, x_o) και (x_o, x_o+δ). Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_o και υπάρχουν στο IR τα όρια $\lim\limits_{x\to x_o^-} f'(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_o^+} f'(x)$ και είναι ίσα, τότε η f είναι παραγωγίσιμη και στο x_o με $f'(x_o) = \lim\limits_{x\to x_o} f'(x)$.

<u>Απόδειξη</u>

Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των ορίων στα όρια:

$$\lim_{x\to x_o^-} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to x_o^+} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$$

προκύπτει απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$, αφού η f είναι συνεχής στο x_o και επειδή υπάρχουν τα όρια $\lim\limits_{x\to x_o^-} f'(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_o^+} f'(x)$, σύμφωνα με τον κανόνα de L' Hospital παίρνουμε:

$$\lim_{x\to x_o^-} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o^-} f'(x) \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to x_o^+} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o^+} f'(x).$$

Επειδή τώρα τα όρια $\lim\limits_{x\to x_o^-} f'(x)$ και $\lim\limits_{x\to x_o^+} f'(x)$ είναι ίσα και πραγματικοί αριθμοί τελικά έχουμε:

$$\lim_{x\to x_o^-} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = \lim_{x\to x_o^+} \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \in IR.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o με $f'(x_o) = \lim\limits_{x\to x_o} f'(x)$. □

<u>Σχόλιο</u>: Αν για μία συνάρτηση f ικανοποιείται η υπόθεση του παραπάνω θεωρήματος, τότε όπως προκύπτει και από το συμπέρασμα του θεωρήματος η παράγωγος f' της συνάρτησης αυτής είναι συνεχής στο x_o. Αν λοιπόν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε μια περιοχή ενός σημείου x_o του πεδίου ορισμού της και η f' δεν είναι συνεχής στο x_o, τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o} f'(x)$. Συνεπώς στο παραπάνω θεώρημα η ύπαρξη του $\lim\limits_{x\to x_o} f'(x)$ αποτελεί μόνο ικανή συνθήκη

[2] Το θεώρημα αυτό το διατυπώνω και το αποδεικνύω με αυτόν τον τρόπο για να το προσαρμόσω στις συναρτήσεις πολλαπλού τύπου που μελετάμε. Μια γενική διατύπωση του θεωρήματος μπορείτε να βρείτε στο βιβλίο του Δημητρίου Α. Κάππου: *Μαθήματα Αναλύσεως - Απειροστικός Λογισμός* (Αθήνα 1962), τεύχος Α΄, σελίδα 531.

για την ύπαρξη της παραγώγου της f στο x_o. Δηλαδή, αν δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_o} f'(x)$ δε σημαίνει ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_o.

Ως εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος ας δούμε την παρακάτω άσκηση:

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \lambda, & x \le 1 \\ \\ 4\sqrt{x} - 1, & x > 1 \end{cases}.$$

Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η f είναι συνεχής στο 1 και στη συνέχεια για την τιμή του λ που θα βρείτε να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

Λύση

Εύκολα βρίσκουμε ότι για $\lambda = 2$ η f είναι συνεχής στο 1.
Για $\lambda = 2$ θα μελετήσουμε την f ως προς την παραγωγισιμότητα στο 1 με δύο τρόπους, με τον ορισμό και με εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος.

1^{ος} τρόπος (με τον ορισμό της παραγώγου)

Έχουμε:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 + 2 - 3}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-}(x+1) = 2$$

και

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{4\sqrt{x} - 1 - 3}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{4\sqrt{x} - 1 - 3}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{4\sqrt{x} - 4}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{4(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \lim_{x\to 1^+} \frac{4}{(\sqrt{x}+1)} = \frac{4}{2} = 2.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = 2$.

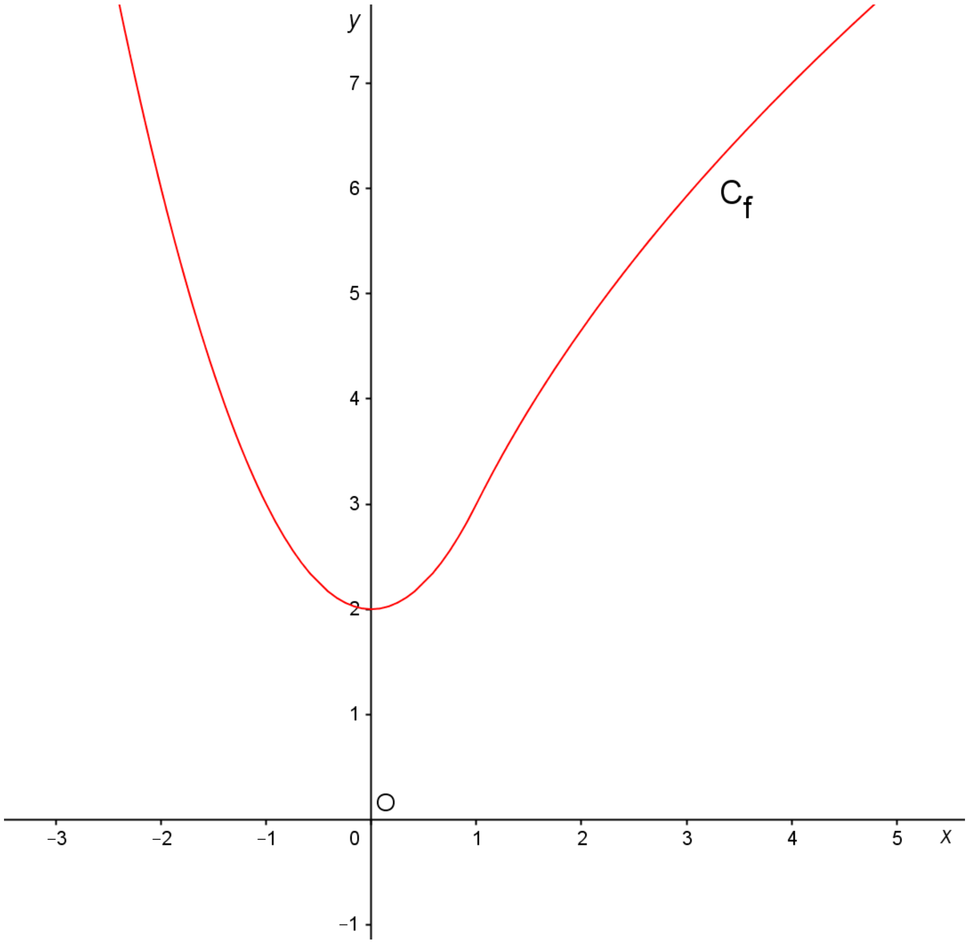
2^{ος} τρόπος (με τη βοήθεια του παραπάνω θεωρήματος)

Έχουμε:

$$f'(x) = 2x,\ x < 1 \qquad \text{και} \qquad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}},\ x > 1.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύει $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f'(x) = 2$ και αφού η f είναι συνεχής στο 1, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα συμπεραίνουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = 2$.

<u>Σημείωση</u>: Για $\lambda = 2$ η παραγωγισιμότητα της f στο 1 φαίνεται και από τη γραφική της παράσταση που ακολουθεί.



Ως εκπαιδευτικοί θα πρέπει να προφυλάσσουμε τους μαθητές μας από τα παραπάνω λάθη λύνοντας σχετικές ασκήσεις στην τάξη και συζητώντας όλες τις περιπτώσεις. Θα πρέπει να τονίζουμε ιδιαίτερα ότι η συνέχεια μιας συνάρτησης πολλαπλού τύπου σε ένα συνοριακό της σημείο x_o είναι αναγκαία συνθήκη (όχι και ικανή) για να είναι η συνάρτηση αυτή παραγωγίσιμη στο x_o. Γι' αυτό λοιπόν, όταν θέλουμε να δούμε αν μία συνάρτηση f πολλαπλού τύπου είναι παραγωγίσιμη σε ένα συνοριακό της σημείο x_o, καλό είναι πρώτα να μελετάμε τη συνάρτηση αυτή ως προς τη συνέχεια στο x_o και αν είναι συνεχής, τότε να την μελετάμε και ως προς την παραγωγισιμότητα. Ο έλεγχος για την παραγωγισιμότητα πρέπει να γίνεται με τον ορισμό και μόνο και όχι με τη βοήθεια του παραπάνω θεωρήματος, το οποίο και δεν αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο, αλλά και όπως είδαμε η ύπαρξη του $\lim\limits_{x \to x_o} f'(x)$ αποτελεί μόνο ικανή συνθήκη για να είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση f στο x_o.

Β. Κανόνες de L' Hospital

Ένα λάθος που γίνεται συχνά από μαθητές της Γ΄ Λυκείου στην εφαρμογή των κανόνων de L' Hospital είναι στην περίπτωση όπου το x τείνει σε έναν πραγματικό αριθμό x_0 και οι συναρτήσεις των όρων της κλασματικής παράστασης είναι παραγωγίσιμες σε περιοχή του x_0. Στην περίπτωση αυτή οι μαθητές όταν συναντούν απροσδιόριστη μορφή γράφουν ότι το ζητούμενο όριο είναι ίσο με το όριο στο x_0 της κλασματικής παράστασης με όρους τις παραγώγους των δύο συναρτήσεων και αμέσως δίνουν ως όριο τον λόγο των παραγώγων τους στο x_0 χωρίς να εξετάζουν αν υπάρχει το όριο της κλασματικής παράστασης που προκύπτει με την παραγώγιση. Δηλαδή, για παράδειγμα, γράφουν:

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right) \text{ή} \left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)}{=} \lim_{x\to x_o}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(x_o)}{g'(x_o)}$$

Αυτό το κάνουν κυρίως όταν γνωρίζουμε ή μπορούμε να βρούμε τις παραγώγους των δύο συναρτήσεων στο x_0.
Μπορείτε να δείτε αν θέλετε και στην ηλεκτρονική διεύθυνση:

http://www.p-theodoropoulos.gr/ergasies/didakt-ask-glyk.pdf

σχετικό σχόλιό μου για την εφαρμογή των κανόνων de L' Hospital.

Εδώ θα πρέπει να προσέχουμε και πώς διατυπώνουμε μία άσκηση, ώστε να μην παρασύρουμε τους μαθητές σε λάθη. Για παράδειγμα, αν δώσουμε στους μαθητές την άσκηση:

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{x^2}-\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}.$$

α. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο 0.

β. Να βρείτε (αν υπάρχει) το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

απαντώντας οι μαθητές στο πρώτο ερώτημα θα βρουν εύκολα ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο 0 με $f'(0)=0$ και $g'(0)=-\dfrac{1}{6}$, ενώ για το δεύτερο ερώτημα πολλοί μαθητές θα παρασυρθούν από τις παραγώγους των δύο συναρτήσεων στο 0 και ως λύση θα δώσουν:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{-\frac{1}{6}} = 0,$$

επειδή δεν υποψιάζονται ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f'(x)$.

Αν όμως στο πρώτο ερώτημα ζητηθεί να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων αυτών που είναι:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x}-\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases} \quad \& \quad g'(x)=\begin{cases} \frac{x\sigma\upsilon\nu x-2\eta\mu x}{x^3}+\frac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ -\frac{1}{6}, & x=0 \end{cases}$$

τότε ίσως κάποιοι μαθητές δουν ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f'(x)$ και δώσουν τη λύση:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{g(x)}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}}{\frac{g(x)-g(0)}{x-0}} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{-\frac{1}{6}} = 0$$

που είναι σωστή.

<u>Παρατήρηση</u>: Παρατηρώντας τη δεύτερη λύση βλέπουμε ότι τελικά το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$ είναι ίσο[3] με $\frac{f'(0)}{g'(0)}$ που δίνουν οι μαθητές και στην πρώτη λύση. Όμως, η πρώτη λύση δε μπορεί να γίνει αποδεκτή, επειδή οι μαθητές ισχυρίζονται ότι $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}=0$, ενώ το $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ δεν υπάρχει αφού δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f'(x)$. Την μη ύπαρξη του $\lim_{x\to 0} f'(x)$ μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε με τη βοήθεια των ακολουθιών: $\alpha_\nu=\frac{1}{2\nu\pi+\frac{\pi}{2}}$ και $\beta_\nu=\frac{1}{2\nu\pi}$ όπου παίρνουμε $\lim f'(\alpha_\nu)=0$ και $\lim f'(\beta_\nu)=-1$. Αυτόν τον τρόπο όμως δεν μπορούμε να τον παρουσιάσουμε στους μαθητές, γιατί δε γνωρίζουν την αντίστοιχη θεωρία.

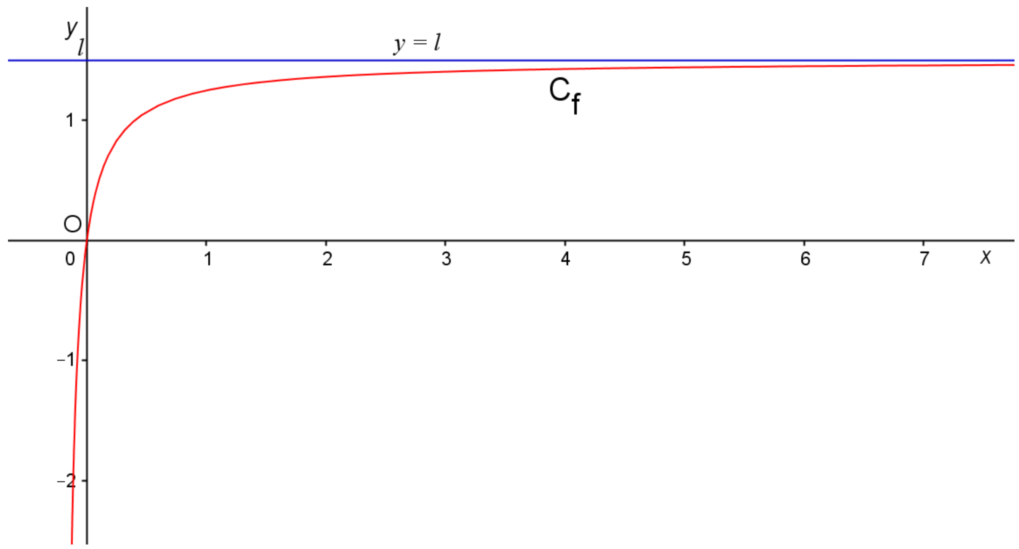
Επειδή στο σχολικό βιβλίο δεν τονίζεται[4] ιδιαίτερα η μη ύπαρξη των ορίων $\lim_{x\to\pm\infty}\eta\mu x$ και $\lim_{x\to\pm\infty}\sigma\upsilon\nu x$ και στις πανελλαδικές εξετάσεις έχουν δοθεί σχετικά

---

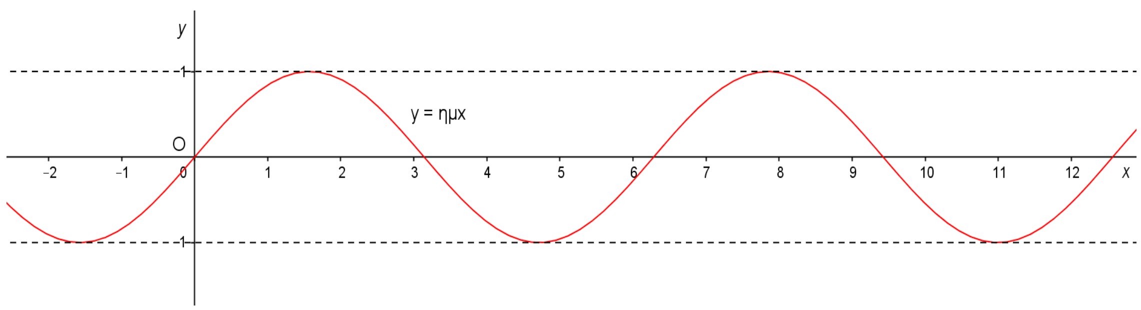
[3] Γενικά αποδεικνύεται ότι αν f και g είναι δύο συναρτήσεις, οι οποίες ορίζονται σε μια περιοχή ενός σημείου x_o και είναι παραγωγίσιμες στο x_o και ισχύουν $f(x_o) = g(x_o) = 0$, $g(x) \neq 0$ κοντά στο xo και $g'(x_o) \neq 0$ τότε: $\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_o)}{g'(x_o)}$.

[4] Δείτε το παράδειγμα στο κριτήριο παρεμβολής.

θέματα [για παράδειγμα, στις εξετάσεις του 2001 ζητήθηκε ο υπολογισμός του ορίου $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{1+x^2}\cdot \eta\mu(2x)\right)$], θα πρέπει να το τονίζουμε εμείς κατά τη διδασκαλία. Εγώ, για παράδειγμα, για να πείσω τους μαθητές μου ότι δεν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to\pm\infty}\eta\mu x$ και $\lim_{x\to\pm\infty}\sigma\upsilon\nu x$ και να χρησιμοποιούν τη διαδικασία με τη φραγμένη συνάρτηση για τον υπολογισμό ορίων σαν αυτό των πανελλαδικών εξετάσεων, χρησιμοποιούσα γραφικό τρόπο. Παρουσίαζα για σύγκριση και αντιδιαστολή τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων, όπως π.χ. τις παρακάτω:



και



στις οποίες παρατηρούμε τα εξής:

- Στην πρώτη γραφική παράσταση η καμπύλη στο +∞ προσεγγίζει μια οριζόντια ευθεία με εξίσωση *y* = *l*. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ και ισούται με *l*, δηλαδή $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$.

- Στη δεύτερη, που είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x$, η οποία είναι φραγμένη, φαίνεται καθαρά ότι η ταλάντωση συνεχίζεται ως το +∞ και το -∞ που σημαίνει αυτό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x$ στο +∞ και στο -∞ δεν προσεγγίζει μια οριζόντια ευθεία, δηλαδή δεν υπάρχουν τα όρια $\lim_{x\to+\infty}\eta\mu x$ και $\lim_{x\to-\infty}\eta\mu x$.

Γ. Παράγωγος τετραγωνικής ρίζας συνάρτησης

Ένα άλλο λάθος που κάνουν επίσης πολλοί μαθητές της Γ΄ Λυκείου είναι στην παραγώγιση της τετραγωνικής ρίζας μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης g με μη αρνητικές τιμές όπου δεν εξετάζουν αν η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{g(x)}$ παραγωγίζεται και στα σημεία (αν υπάρχουν) που μηδενίζεται η g. Επειδή η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ δεν παραγωγίζεται στο 0, οι μαθητές αυτοί νομίζουν ότι και η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{g(x)}$ δεν παραγωγίζεται στα σημεία που μηδενίζεται η g (προφανώς και η f) και γι' αυτό δεν κάνουν ειδικό έλεγχο για αυτά τα σημεία.

Αυτό για τους μαθητές θεωρώ πως είναι δικαιολογημένο, γιατί στο σχολικό βιβλίο στην εύρεση της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{x}$ δεν ελέγχεται αν η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη και στο 0, αλλά γίνεται παραπομπή σε προηγούμενη παράγραφο που είναι εκτός ύλης. Αυτό έχει ως συνέπεια οι μαθητές να μη συνειδητοποιούν ότι πρέπει να ελέγχεται και αυτή η περίπτωση.

Εδώ είναι σημαντικός ο ρόλος του εκπαιδευτικού, ο οποίος πρέπει να τονίζει ιδιαίτερα την περίπτωση αυτή δίνοντας στους μαθητές και ειδικά παραδείγματα, όπως το παρακάτω:

Παράδειγμα: Έστω ότι ζητάμε από τους μαθητές να βρουν την παράγωγο της συνάρτησης:

$$f(x)=\sqrt{x\eta\mu x},\ x\in[0,\ \pi].$$

Επειδή η δοθείσα συνάρτηση μηδενίζεται στα σημεία 0 και π, πολλοί μαθητές όπως αναφέρθηκε παραπάνω θεωρούν ότι δεν παραγωγίζεται σ' αυτά τα σημεία και δίνουν ως παράγωγο της f τη συνάρτηση:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x\eta\mu x}}\cdot(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x),\ x\in(0,\ \pi).$$

Όμως, θα πρέπει να ελεγχθεί αν η f είναι παραγωγίσιμη και στα σημεία μηδενισμού της, δηλαδή στα σημεία 0 και π. Έχουμε λοιπόν:

α) <u>Έλεγχος για το σημείο 0</u>:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x\eta\mu x}}{x}=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{x\eta\mu x}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{\eta\mu x}{x}}=1$$

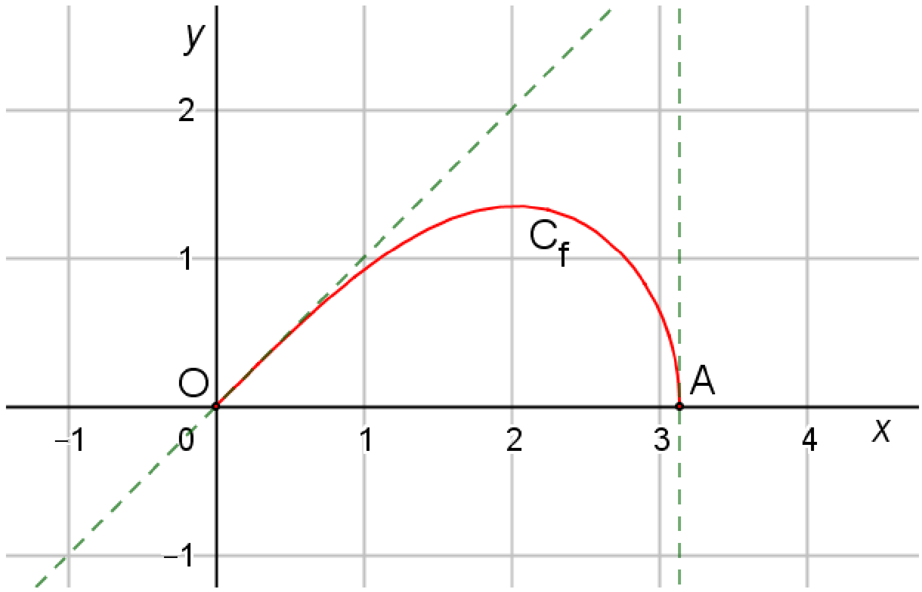
β) <u>Έλεγχος για το σημείο π</u>:

$$\lim_{x\to \pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to \pi}\frac{\sqrt{x\eta\mu x}}{x-\pi}=-\lim_{x\to \pi}\sqrt{\frac{x\eta\mu(\pi-x)}{(\pi-x)^2}}=-\lim_{x\to \pi}\sqrt{\frac{1}{\pi-x}\cdot\frac{x\eta\mu(\pi-x)}{\pi-x}}=-\infty$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και στο 0, ενώ στο π δεν είναι, οπότε η παράγωγός της είναι η συνάρτηση:

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{x\eta\mu x}}\cdot(\eta\mu x+x\sigma\upsilon\nu x),\ x\in(0,\ \pi)\\ \\ 1,\ \ x=0\end{cases}$$

Εποπτικά αυτό φαίνεται στη γραφική παράσταση της f που ακολουθεί, στην οποία παρατηρούμε ότι η κλίση της f στο 0 είναι ίση με 1, ενώ στο π απειρίζεται αρνητικά, αφού η C_f στο σημείο αυτό κατεβαίνοντας (αρνητική κλίση) τέμνει κάθετα τον άξονα $x'x$.



Αντί επιλόγου (Μία γενική παρατήρηση)

Ο τίτλος του αντίστοιχου κεφαλαίου είναι: «**Διαφορικός Λογισμός**».

Όμως, στο κεφάλαιο αυτό σε κανένα σημείο δεν δίνεται η έννοια του **διαφορικού** μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της στο οποίο είναι παραγωγίσιμη. Γι’ αυτό οι μαθητές ίσως απορούν γιατί ονομάζεται έτσι το συγκεκριμένο κεφάλαιο.

Είναι γνωστό ότι αν μια συνάρτηση $y=f(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της, τότε το **διαφορικό**[5] της f στο σημείο x_o ορίζεται ως εξής:

$$dy=df(x_o)=f'(x_o)dx\,.$$

Παρατηρούμε ότι το **διαφορικό** μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_o του πεδίου ορισμού της στο οποίο είναι παραγωγίσιμη είναι μια **γραμμική συνάρτη-**

[5] Ο Leibniz επινόησε τα απείρως μικρά μεγέθη τα οποία ονόμασε διαφορικά και για την απόδοσή τους χρησιμοποίησε τον συμβολισμό που χρησιμοποιείται και σήμερα.

ση με τη βοήθεια της οποίας υπολογίζονται με μεγάλη ακρίβεια οι τιμές της f για τιμές του x κοντά στο x_o. Δηλαδή έχουμε:

$$f(x_o + dx) \approx f(x_o) + dy = f(x_o) + f'(x_o)dx\,.$$

Η **γραφική παράσταση** της συνάρτησης του διαφορικού της f στο x_o ταυτίζεται με την **εφαπτομένη** της C_f στο σημείο $(x_o, f(x_o))$.

Στο σημείο αυτό επιτρέψτε μου να εκφράσω την προσωπική μου άποψη σχετικά με την διδασκαλία της έννοιας του διαφορικού στους μαθητές της Γ΄ Λυκείου.

Νομίζω ότι η έννοια του διαφορικού δεν είναι δύσκολη και γι' αυτό θα μπορούσε να εισαχθεί στην ύλη των Μαθηματικών Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου. Θεωρώ δε, πως συναρτήσεις σαν την παραπάνω συνάρτηση f της Γ΄ ενότητας προσφέρονται για την παρουσίαση της έννοιας του διαφορικού μιας συνάρτησης σε μαθητές της Γ΄ Λυκείου, γιατί εμφανίζονται και οι δύο οι περιπτώσεις και έτσι οι μαθητές μπορούν να τις συγκρίνουν και να τις κατανοήσουν καλύτερα. Πιο συγκεκριμένα, για τη συνάρτηση αυτή ορίζεται διαφορικό στα σημεία του διαστήματος [0, π) επειδή είναι παραγωγίσιμη σ' αυτά, ενώ στο π που δεν είναι παραγωγίσιμη δεν ορίζεται διαφορικό. Οι μαθητές για τα σημεία 0 και π μπορούν να το διαπιστώσουν αυτό και εποπτικά από το αντίστοιχο σχήμα ως εξής: Παρατηρούν ότι η γραφική παράστασης της f στο σημείο $O(0, f(0))$ έχει πλάγια εφαπτομένη που είναι γραφική παράσταση συνάρτησης (ορίζεται διαφορικό), ενώ στο σημείο $A(\pi, f(\pi))$ η C_f έχει κατακόρυφη εφαπτομένη που δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης (δεν ορίζεται διαφορικό).

Αν εισαχθεί η έννοια του διαφορικού στην ύλη των Μαθηματικών Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου, τότε οι μαθητές θα κατανοούν:

1. τον τίτλο του αντίστοιχου κεφαλαίου,
2. τον όρο «διαφορικές εξισώσεις»,
3. το διαφορικό $du = g'(x)dx$ που συναντούν στον Ολοκληρωτικό Λογισμό,
4. γιατί μια **παραγωγίσιμη** συνάρτηση λέγεται και **διαφορίσιμη** και τέλος
5. γιατί στον ορισμό της παραγώγου, όταν το όριο $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ υπάρχει

   και δεν είναι πραγματικός αριθμός (είναι $+\infty$ ή $-\infty$), δεν λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη (διαφορίσιμη) στο x_o.