

Τρία συνηθισμένα λάθη που κάνουν μαθητές της Γ΄ Λυκείου σε ασκήσεις του Διαφορικού Λογισμού

Δρ. Παναγιώτης Α. Θεοδωρόπουλος
 πρώην Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

Πρόλογος

Στην εργασία αυτή επισημαίνονται και αναλύονται με παραδείγματα και σχόλια τρία συνηθισμένα λάθη που γίνονται από μαθητές της Γ΄ Λυκείου σε ασκήσεις του Διαφορικού Λογισμού. Τα λάθη αυτά εντοπίζονται στην παραγωγή μιας συνάρτησης πολλαπλού τύπου, στην εφαρμογή των κανόνων de L'Hospital και στην παραγωγή της τετραγωνικής ρίζας μιας συνάρτησης.

Επειδή σ' αυτά τα λάθη παρατηρείται μεγάλη συχνότητα και επειδή είναι βασικά, δηλαδή σχετίζονται με την άμεση εφαρμογή της θεωρίας, έκρινα πως θα ήταν χρήσιμο και ωφέλιμο να μελετηθούν και να αναλυθούν. Για αυτόν τον λόγο γράφτηκε η παρούσα εργασία, η οποία έχει σαν σκοπό την ενημέρωση και τον προβληματισμό, ώστε να τονίζονται αυτά τα σημεία κατά την διδασκαλία και να αποφεύγονται έτσι τα λάθη που παρατηρούνται στοχεύοντας στην βαθύτερη εμπέδωση της αντίστοιχης θεωρίας από τους μαθητές.

A. Παράγωγος συνάρτησης πολλαπλού τύπου

Θα μελετήσουμε την περίπτωση μέσα από ένα παράδειγμα.

Έχει παρατηρηθεί ότι όταν δίνουμε στους μαθητές της Γ΄ Λυκείου μια συνάρτηση πολλαπλού τύπου, η οποία στα συνοριακά της σημεία ορίζεται με τον έναν από τους δύο τύπους με τους οποίους ορίζεται εκατέρωθεν αυτών, όπως π.χ. η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \sin x, & x < 0 \\ 2x^3 - x^2 + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

και ζητάμε να βρουν την παράγωγό της, τότε πολλοί μαθητές για τα συνοριακά σημεία δεν κάνουν ειδικό έλεγχο, αλλά θεωρούν ότι η παράγωγος της συνάρτησης σε αυτά τα σημεία δίνεται από την παράγωγο του αντίστοιχου τύπου. Δηλαδή για την παραπάνω συνάρτηση δίνουν:

$$f'(x) = \begin{cases} \eta\mu x, & x < 0 \\ 6x^2 - 2x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Οι μαθητές αυτοί δεν έχουν συνειδητοποιήσει ότι μια συνάρτηση f πολλαπλού τύπου είναι παραγωγίσιμη σε ένα συνοριακό της σημείο x_0 εάν υπάρχουν στο

\mathbb{R} τα όρια: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και είναι ίσα.

Άλλοι πάλι μαθητές για να εξετάσουν αν μια συνάρτηση f πολλαπλού τύπου είναι παραγωγίσιμη σε ένα συνοριακό της σημείο x_0 στο οποίο ορίζεται ενεργούν ως εξής:

Αρχικά βρίσκουν τις παραγώγους συναρτήσεων στα πλευρικά διαστήματα του x_0 (ανοικτά στο x_0) στα οποία ορίζεται η f και είναι παραγωγίσιμη. Δηλαδή για την παραπάνω συνάρτηση βρίσκουν τις παραγώγους:

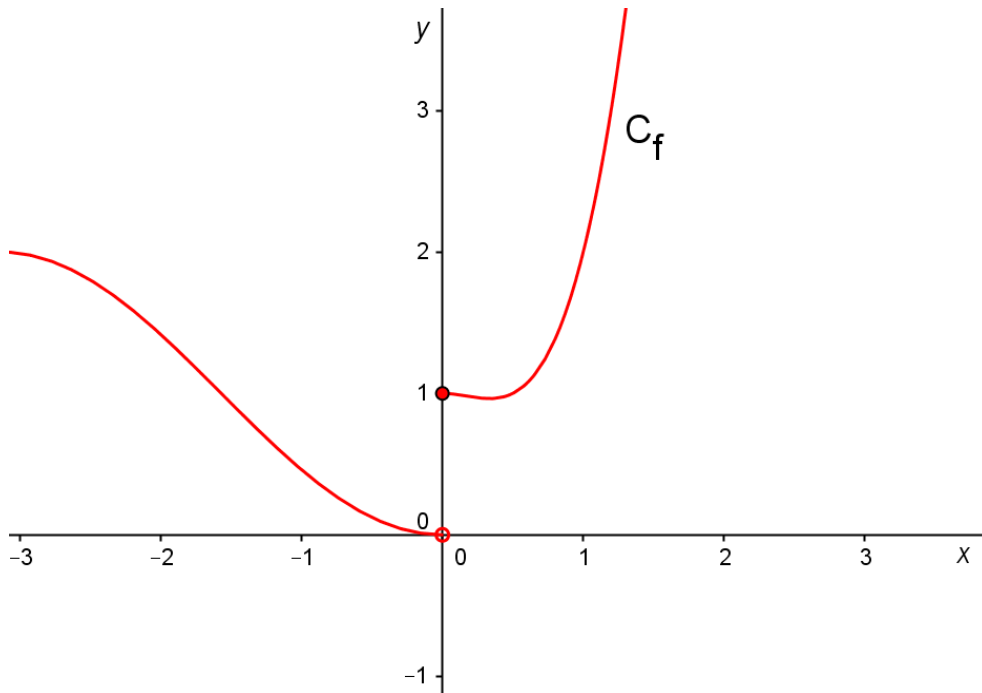
$$f'(x) = \eta\mu x, \quad x < 0 \quad \text{και} \quad f'(x) = 6x^2 - 2x, \quad x > 0.$$

Στη συνέχεια βρίσκουν (αν υπάρχουν) τα όρια των παραγώγων αυτών στο x_0 . Δηλαδή για τη συνάρτηση που μελετάμε βρίσκουν:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \eta\mu x = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (6x^2 - 2x) = 0.$$

Αν τα δύο όρια υπάρχουν στο \mathbb{R} και είναι ίσα, τότε συμπεραίνουν ότι η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη και στο x_0 , διαφορετικά όχι. Δηλαδή για την παραπάνω συνάρτηση συμπεραίνουν ότι $f'(0) = 0$.

Είναι φανερό ότι ο τρόπος συμπερασμού και στις δύο περιπτώσεις δεν είναι σωστός. Αυτό φαίνεται καθαρά και από τη συνάρτηση που μελετάμε, η οποία, όπως μπορούμε να δούμε και από την γραφική της παράσταση που ακολουθεί¹, δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, αφού δεν είναι συνεχής στο σημείο αυτό.



¹ Καλό είναι όταν είναι εφικτό να υποστηρίζουμε τα συμπεράσματα και εποπτικά, διότι η εποπτεία διεγείρει την ενόραση και η ενόραση βοηθά πολύ στην κατανόηση των εννοιών και των σχέσεων.

Οι μαθητές που κάνουν το δεύτερο λάθος νομίζω ότι παρασύρονται από το ε-ξής:

Τυχαίνει να έχουν λύσει ασκήσεις με συναρτήσεις για τις οποίες ισχύει αυτό που κάνουν και έτσι το γενικεύουν. Η διαδικασία που ακολουθούν οι μαθητές αυτοί δίνει σωστό αποτέλεσμα εάν επιπλέον η συνάρτηση είναι και συνεχής στο x_0 , δηλαδή εφαρμόζεται στην ουσία το παρακάτω θεώρημα, το οποίο όμως οι μαθητές δεν γνωρίζουν γιατί δεν διδάσκεται.

Θεώρημα²: Έστω μία συνάρτηση f , η οποία ορίζεται σε ένα διάστημα Δ και για ένα εσωτερικό σημείο x_0 του Δ υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα $(x_0 - \delta, x_0)$ και $(x_0, x_0 + \delta)$. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και υπάρχουν στο \mathbb{R} τα όρια $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$ και είναι ίσα, τότε η f είναι παραγωγίσιμη και στο x_0 με $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$.

Απόδειξη

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 , εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των ορίων στα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

προκύπτει απροσδιοριστία της μορφής $\frac{0}{0}$.

Επειδή τώρα υπάρχουν τα όρια: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$, σύμφωνα με τον κανόνα de L' Hospital παίρνουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x).$$

Τέλος, επειδή τα όρια: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$ είναι ίσα και πραγματικοί αριθμοί έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$. \square

Αν για μία συνάρτηση f ικανοποιείται η υπόθεση του παραπάνω θεωρήματος, τότε όπως προκύπτει και από το συμπέρασμα του θεωρήματος αυτού η παράγωγος f' της συνάρτησης f είναι συνεχής στο x_0 . Αν λοιπόν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε μια περιοχή ενός σημείου x_0 του πεδίου ορισμού της και

² Το θεώρημα αυτό το διατύπωσα και το απόδειξα με αυτόν τον τρόπο για να το προσαρμόσω στις συναρτήσεις πολλαπλού τύπου που μελετάμε. Μια γενική διατύπωση του θεωρήματος αυτού μπορείτε να βρείτε στο βιβλίο του Δημητρίου Α. Κάππου: *Μαθήματα Αναλύσεως - Απειροστικός Λογισμός*, τεύχος Α', σελίδα 531 (Αθήνα 1962).

η f' δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$. Συνεπώς στο παραπάνω θεώρημα η ύπαρξη του $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ αποτελεί μόνο ικανή συνθήκη για την ύπαρξη της παραγώγου της f στο x_0 . Δηλαδή, αν δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ δεν σημαίνει ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Ως εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος ας δούμε την παρακάτω άσκηση:

Άσκηση: Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \lambda, & x \leq 1 \\ 4\sqrt{x} - 1, & x > 1 \end{cases}.$$

Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η f είναι συνεχής στο 1 και στη συνέχεια για την τιμή του λ που θα βρείτε να εξετάσετε αν η f είναι και παραγωγίσιμη στο 1.

Λύση

Εύκολα βρίσκουμε ότι για $\lambda = 2$ η f είναι συνεχής στο 1.

Για $\lambda = 2$ θα μελετήσουμε την f ως προς την παραγωγισιμότητα στο 1 με δύο τρόπους, με τον ορισμό και με εφαρμογή του παραπάνω θεωρήματος.

1^{ος} τρόπος (με τον ορισμό της παραγώγου)

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 2 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4\sqrt{x} - 1 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4\sqrt{x} - 1 - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4\sqrt{x} - 4}{x - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4}{\sqrt{x} + 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = 2$.

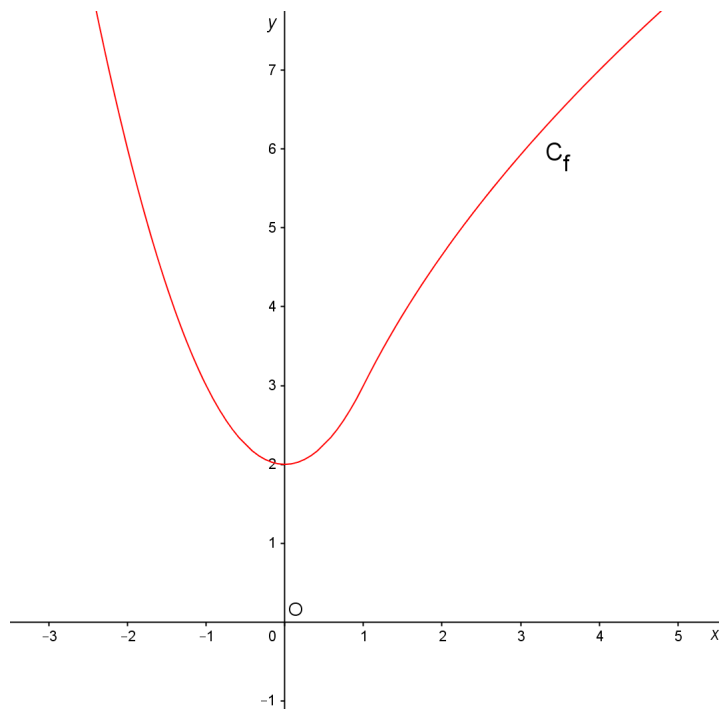
2^{ος} τρόπος (με την βοήθεια του παραπάνω θεωρήματος)

Έχουμε:

$$f'(x) = 2x, \quad x < 1 \quad \text{και} \quad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}, \quad x > 1.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 2$ και αφού η f είναι συνεχής στο 1, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα συμπεραίνουμε ότι η f είναι και παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1) = 2$.

Για $\lambda = 2$ η παραγωγισιμότητα της f στο 1 φαίνεται και από την γραφική της παράσταση που ακολουθεί.



Ως εκπαιδευτικοί θα πρέπει να προφυλάσσουμε τους μαθητές μας από τα παραπάνω λάθη λύνοντας σχετικές ασκήσεις στην τάξη και συζητώντας όλες τις περιπτώσεις. Θα πρέπει να τονίζουμε ιδιαίτερα ότι η συνέχεια μιας συνάρτησης πολλαπλού τύπου σε ένα συνοριακό της σημείο x_0 στο οποίο ορίζεται είναι αναγκαία συνθήκη (όχι και ικανή) για να είναι η συνάρτηση αυτή παραγωγίσιμη στο x_0 . Γι' αυτό λοιπόν, όταν θέλουμε να δούμε αν μία συνάρτηση f πολλαπλού τύπου είναι παραγωγίσιμη σε ένα συνοριακό της σημείο x_0 στο οποίο ορίζεται, καλό είναι πρώτα να μελετάμε την συνάρτηση αυτή ως προς την συνέχεια στο x_0 και αν είναι συνεχής, τότε να την μελετάμε και ως προς την παραγωγισιμότητα. Ο έλεγχος για την παραγωγισιμότητα πρέπει να γίνεται με τον ορισμό και μόνο και όχι με την βοήθεια του παραπάνω θεωρήματος, το οποίο και δεν αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο, αλλά και όπως είδαμε η ύπαρξη του $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ αποτελεί μόνο ικανή συνθήκη για να είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση f στο x_0 .

B. Κανόνες de L' Hospital

Ένα λάθος που γίνεται συχνά από μαθητές της Γ' Λυκείου στην εφαρμογή των κανόνων de L' Hospital είναι στην περίπτωση που το x τείνει σε έναν πραγματικό αριθμό x_0 , οι συναρτήσεις των όρων της κλασματικής παράστασης είναι παραγωγίσιμες σε περιοχή του x_0 και η παράγωγος της συνάρτησης του παρονομαστή στο x_0 είναι διάφορη του μηδενός. Στην περίπτωση αυτή οι μαθητές, όταν συναντούν απροσδιόριστη μορφή, ισχυρίζονται ότι το ζητούμενο όριο είναι ίσο με το όριο της κλασματικής παράστασης που προκύπτει με την παρα-

γώγιση των όρων της αρχικής κλασματικής παράστασης και αμέσως δίνουν ως όριο τον λόγο των παραγώγων των δύο συναρτήσεων στο x_0 . Δηλαδή, για παράδειγμα, γράφουν:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right) \text{ ή } \left(\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Το πρόβλημα εδώ είναι ότι οι μαθητές δεν εξετάζουν εάν υπάρχει το όριο της κλασματικής παράστασης που προκύπτει με την παραγωγή, δηλαδή δεν εξετάζουν αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ και ενεργούν με τον τρόπο που περιγράφεται

παραπάνω ακόμη στην περίπτωση που δεν είναι γνωστό αν υπάρχει αυτό το όριο. Είναι προφανές ότι αν δεν υπάρχει το όριο αυτό, τότε η διαδικασία δεν θα είναι σωστή. Νομίζω ότι οι μαθητές που κάνουν αυτό το λάθος θεωρούν ότι δεν χρειάζεται να γίνεται έλεγχος, γιατί ίσως δεν έχουν προσέξει την διατύπωση του θεωρήματος ή στις ασκήσεις που έχουν λύσει, οι συναρτήσεις έχουν συνεχείς παραγωγούς όποτε εφαρμόζεται το θεώρημα χωρίς να γίνεται ειδική αναφορά και τους δημιουργείται έτσι η εντύπωση ότι ισχύει γενικά, κάτι όμως που δεν συμβαίνει, όπως φαίνεται καθαρά στο επόμενο παράδειγμα.

(Μπορείτε να δείτε αν θέλετε και στην ηλεκτρονική διεύθυνση:

<http://www.p-theodoropoulos.gr/ergasies/didakt-ask-glyk.pdf>

σχετικό σχόλιό μου για την εφαρμογή των κανόνων *de L' Hospital*).

Εδώ θα πρέπει να προσέχουμε και εμείς τον τρόπο διατύπωσης μιας άσκησης, ώστε να μην παρασύρουμε τους μαθητές σε τέτοια λάθη. Για παράδειγμα, αν δώσουμε στους μαθητές την άσκηση:

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\eta \mu x}{x^2} - \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

α. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο 0.

β. Να βρείτε (αν υπάρχει) το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

απαντώντας οι μαθητές στο πρώτο ερώτημα θα βρουν εύκολα ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο 0 με $f'(0) = 0$ και $g'(0) = -\frac{1}{6}$, ενώ για το δεύτερο ερώτημα πολλοί μαθητές θα παρασυρθούν από την ύπαρξη των παραγώγων των δύο συναρτήσεων στο 0 και θα δώσουν ως λύση:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{-\frac{1}{6}} = 0,$$

επειδή δεν υποψιάζονται ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$.

Αν όμως στο πρώτο ερώτημα ζητηθεί να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων αυτών που είναι:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\eta\mu\frac{1}{x} - \sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad \& \quad g'(x) = \begin{cases} \frac{x\sigma\upsilon\nu x - 2\eta\mu x}{x^3} + \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ -\frac{1}{6}, & x = 0 \end{cases}$$

τότε ίσως κάποιοι μαθητές δουν ότι δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ και δώσουν τη λύση:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)}{x}}{\frac{g(x)}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}}{\frac{g(x) - g(0)}{x - 0}} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{0}{-\frac{1}{6}} = 0$$

που είναι σωστή.

Παρατηρώντας την δεύτερη λύση βλέπουμε ότι τελικά το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$ είναι

ίσο³ με $\frac{f'(0)}{g'(0)}$ που δίνουν οι μαθητές και στην πρώτη λύση. Όμως, η πρώτη

λύση δεν μπορεί να γίνει αποδεκτή, επειδή οι μαθητές ισχυρίζονται ότι

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = 0$, ενώ το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ δεν υπάρχει αφού δεν υπάρχει το

$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$. Την μη ύπαρξη του $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε με

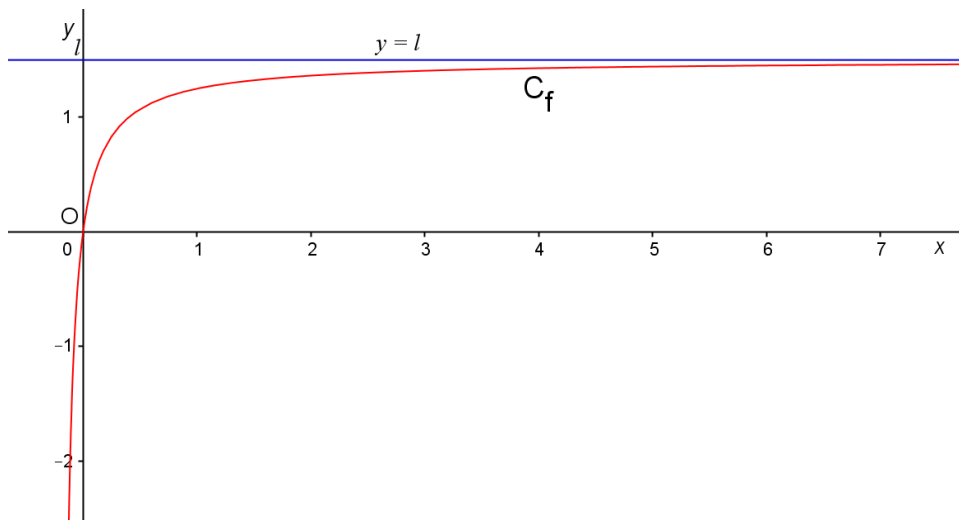
την βοήθεια των ακολουθιών: $\alpha_\nu = \frac{1}{2\nu\pi + \frac{\pi}{2}}$ και $\beta_\nu = \frac{1}{2\nu\pi}$, όπου παίρνουμε:

$\lim f'(\alpha_\nu) = 0$ και $\lim f'(\beta_\nu) = -1$. Αυτόν τον τρόπο όμως δεν μπορούμε να τον παρουσιάσουμε στους μαθητές, γιατί δεν γνωρίζουν την αντίστοιχη θεωρία.

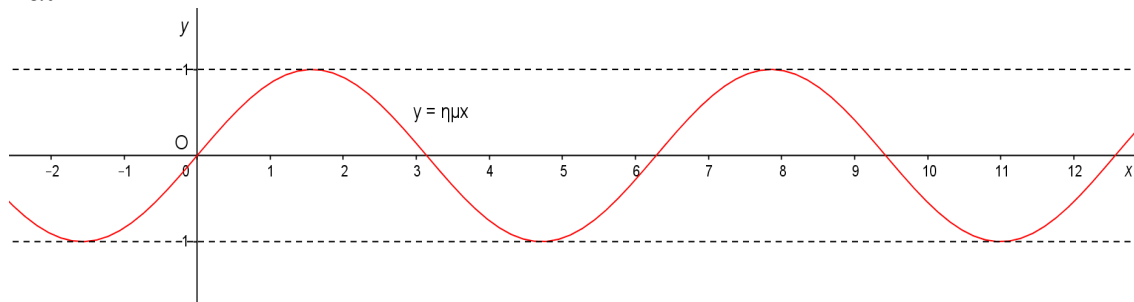
³ Γενικά αποδεικνύεται ότι αν f και g είναι δύο συναρτήσεις, οι οποίες ορίζονται σε μια περιοχή ενός σημείου x_0 και είναι παραγωγίσιμες στο x_0 και ισχύουν $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $g'(x) \neq 0$ κοντά στο x_0 και

$g'(x_0) \neq 0$, τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

Επειδή στο σχολικό βιβλίο δεν τονίζεται⁴ ιδιαίτερα η μη ύπαρξη των ορίων: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \eta\mu x$ και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sigma\upsilon\nu x$ και στις πανελλαδικές εξετάσεις έχουν δοθεί σχετικά θέματα [για παράδειγμα, στις εξετάσεις του 2001 ζητήθηκε ο υπολογισμός του ορίου $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{1+x^2} \cdot \eta\mu(2x) \right)$], θα πρέπει να το τονίζουμε εμείς κατά την διδασκαλία. Εγώ, για παράδειγμα, για να πείσω τους μαθητές μου ότι δεν υπάρχουν τα όρια: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \eta\mu x$ και $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sigma\upsilon\nu x$ και να χρησιμοποιούν την διαδικασία με την φραγμένη συνάρτηση για τον υπολογισμό ορίων σαν αυτό των πανελλαδικών εξετάσεων, χρησιμοποιούσα γραφικό τρόπο. Παρουσίαζα στους μαθητές για σύγκριση και αντιδιαστολή τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων, όπως π.χ. τις παρακάτω:



και



στις οποίες παρατηρούμε τα εξής:

- Στην πρώτη γραφική παράσταση η καμπύλη στο $+\infty$ προσεγγίζει μια οριζόντια ευθεία με εξίσωση $y = l$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και ισούται με l , δηλαδή $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.
- Στην δεύτερη, που είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x$, η οποία είναι φραγμένη, φαίνεται καθαρά ότι η ταλάντωση συνεχίζεται ως το $+\infty$ και το $-\infty$ που σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης

⁴ Δείτε το παράδειγμα στο κριτήριο παρεμβολής.

$f(x) = \eta\mu x$ στο $+\infty$ και στο $-\infty$ δεν προσεγγίζει μια οριζόντια ευθεία, δηλαδή δεν υπάρχουν τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta\mu x$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \eta\mu x$.

Γ. Παράγωγος τετραγωνικής ρίζας συνάρτησης

Ένα άλλο λάθος που κάνουν επίσης πολλοί μαθητές της Γ' Λυκείου είναι στην παραγωγή της τετραγωνικής ρίζας μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης g με μη αρνητικές τιμές όπου δεν εξετάζουν αν η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{g(x)}$ παραγωγίζεται και στα σημεία (αν υπάρχουν) που μηδενίζεται η g . Επειδή η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ δεν παραγωγίζεται στο 0, οι μαθητές αυτοί νομίζουν ότι και η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{g(x)}$ δεν παραγωγίζεται στα σημεία που μηδενίζεται η g (προφανώς και η f) και γι' αυτό δεν κάνουν ειδικό έλεγχο για αυτά τα σημεία. Αυτό για τους μαθητές θεωρώ πως είναι δικαιολογημένο, γιατί στο σχολικό βιβλίο στην εύρεση της παραγώγου της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$ δεν ελέγχεται αν η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη και στο 0, αλλά γίνεται παραπομπή σε προηγούμενη παράγραφο που είναι εκτός ύλης. Αυτό έχει ως συνέπεια οι μαθητές να μην συνειδητοποιούν ότι πρέπει να ελέγχεται και αυτή η περίπτωση.

Εδώ είναι σημαντικός ο ρόλος του εκπαιδευτικού, ο οποίος πρέπει να τονίζει ιδιαίτερα την περίπτωση αυτή δίνοντας στους μαθητές και ειδικές συναρτήσεις για παραγωγή όπως αυτή του παραδείγματος που ακολουθεί.

Παράδειγμα: Αν ζητήσουμε από τους μαθητές να βρουν την παράγωγο της συνάρτησης:

$$f(x) = \sqrt{x\eta\mu x}, \quad x \in [0, \pi],$$

τότε πολλοί μαθητές θεωρώντας ότι η συνάρτηση αυτή δεν παραγωγίζεται στα σημεία 0 και π , επειδή μηδενίζεται σ' αυτά, θα δώσουν ως παράγωγο της f τη συνάρτηση:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x\eta\mu x}} \cdot (\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x), \quad x \in (0, \pi).$$

Όμως, όπως τονίστηκε παραπάνω, θα πρέπει να ελεγχθεί αν η f είναι παραγωγίσιμη και στα σημεία μηδενισμού της, δηλαδή στα σημεία 0 και π . Έτσι έχουμε:

α) Έλεγχος για το σημείο 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x\eta\mu x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{x\eta\mu x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\eta\mu x}{x}} = 1$$

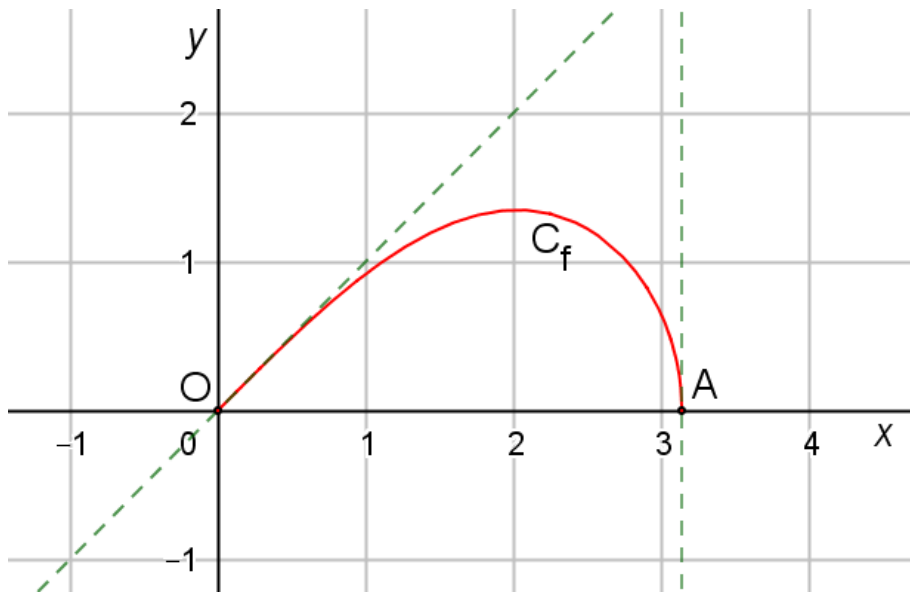
β) Έλεγχος για το σημείο π :

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) - f(\pi)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{x\eta\mu x}}{x - \pi} = -\lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{\frac{x\eta\mu(\pi - x)}{(\pi - x)^2}} = -\lim_{x \rightarrow \pi} \sqrt{\frac{1}{\pi - x} \cdot \frac{x\eta\mu(\pi - x)}{\pi - x}} = -\infty$$

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και στο 0, ενώ στο π δεν είναι, οπότε η παράγωγός της είναι η συνάρτηση:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x\eta\mu x}} \cdot (\eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x), & x \in (0, \pi) \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Εποπτικά αυτό φαίνεται στη γραφική παράσταση της f που ακολουθεί, στην οποία παρατηρούμε ότι η κλίση της f στο 0 είναι ίση με 1, ενώ στο π απειρίζεται αρνητικά, αφού η C_f στο σημείο αυτό κατεβαίνοντας (αρνητική κλίση) τέμνει κάθετα τον άξονα $x'x$.



Αντί επιλόγου (Μία γενική παρατήρηση)

Ο τίτλος του αντίστοιχου κεφαλαίου είναι: «**Διαφορικός Λογισμός**».

Όμως, στο κεφάλαιο αυτό σε κανένα σημείο δεν δίνεται η έννοια του **διαφορικού** μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της στο οποίο είναι παραγωγίσιμη. Γι' αυτό οι μαθητές ίσως να απορούν γιατί ονομάζεται έτσι το συγκεκριμένο κεφάλαιο.

Είναι γνωστό ότι αν μια συνάρτηση $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε το **διαφορικό**⁵ της f στο σημείο x_0 ορίζεται ως εξής:

$$dy = df(x_0) = f'(x_0)dx.$$

⁵ Ο Leibniz (1646 – 1716) επινόησε τα απείρως μικρά μεγέθη τα οποία ονόμασε διαφορικά και για την απόδοσή τους χρησιμοποίησε τον συμβολισμό που χρησιμοποιείται και σήμερα.

Παρατηρούμε ότι το **διαφορικό** μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της στο οποίο είναι παραγωγίσιμη είναι μια **γραμμική συνάρτηση** (dx και dy οι μεταβλητές) με την βοήθεια της οποίας υπολογίζονται με μεγάλη ακρίβεια οι τιμές της f για τιμές του x κοντά στο x_0 . Δηλαδή έχουμε:

$$f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + dy = f(x_0) + f'(x_0)dx.$$

Η **γραφική παράσταση** της συνάρτησης του διαφορικού της f στο x_0 ταυτίζεται με την **εφαπτομένη** της C_f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.

Σχετικά τώρα με την διδασκαλία της έννοιας του διαφορικού στους μαθητές της Γ' Λυκείου προσωπικά πιστεύω ότι για μια ολοκληρωμένη διδασκαλία της έννοιας της παραγώγου καλό θα ήταν να συμπεριληφθεί στην ύλη των Μαθηματικών Κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου και η έννοια του διαφορικού. Θεωρώ ότι συναρτήσεις σαν την συνάρτηση f της Γ' ενότητας προσφέρονται για την παρουσίαση της έννοιας του διαφορικού μιας συνάρτησης σε μαθητές της Γ' Λυκείου, γιατί εμφανίζονται και οι δύο οι περιπτώσεις και έτσι οι μαθητές μπορούν να τις συγκρίνουν και να τις κατανοήσουν καλύτερα. Πιο συγκεκριμένα, για την συνάρτηση αυτή ορίζεται διαφορικό στα σημεία του διαστήματος $[0, \pi)$, επειδή είναι παραγωγίσιμη σ' αυτά τα σημεία, ενώ στο σημείο π , που δεν είναι παραγωγίσιμη, δεν ορίζεται διαφορικό. Οι μαθητές για τα σημεία 0 και π μπορούν να το διαπιστώσουν αυτό και εποπτικά από το αντίστοιχο σχήμα ως εξής:

Οι μαθητές θα παρατηρήσουν στο σχήμα ότι η γραφική παράσταση της f στο σημείο $O(0, f(0))$ έχει πλάγια εφαπτομένη που είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, οπότε ορίζεται διαφορικό της f στο 0 , ενώ στο σημείο $A(\pi, f(\pi))$ η C_f έχει κατακόρυφη εφαπτομένη που δεν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, οπότε δεν ορίζεται διαφορικό της f στο π .

Αν εισαχθεί η έννοια του διαφορικού στην ύλη των Μαθηματικών Κατεύθυνσης της Γ' Λυκείου, τότε οι μαθητές θα κατανοούν:

1. τον τίτλο του αντίστοιχου κεφαλαίου,
2. τον όρο «*διαφορικές εξισώσεις*»,
3. το διαφορικό $du = g'(x)dx$ που συναντούν στον Ολοκληρωτικό Λογισμό,
4. γιατί μια **παραγωγίσιμη** συνάρτηση λέγεται και **διαφορίσιμη** και τέλος
5. γιατί στον ορισμό της παραγώγου, όταν το όριο $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ υπάρχει και δεν είναι πραγματικός αριθμός (είναι $+\infty$ ή $-\infty$), δεν λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη (διαφορίσιμη) στο x_0 .