Λύνοντας ασκήσεις με αντίστροφες συναρτήσεις

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
πρώην Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

Εισαγωγή

Η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f είναι μία κανονική συνάρτηση και επομένως έχει όλες τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά που έχουν οι υπόλοιπες συναρτήσεις, δηλ. πεδίο ορισμού, μονοτονία, ακρότατα κλπ. τις οποίες μπορούμε να μελετάμε είτε με τη βοήθεια του τύπου της, αν μπορεί να βρεθεί, είτε μέσω της *f* στην περίπτωση που δεν μπορεί να βρεθεί τύπος[1] για την f^{-1}.

Σκοπός της εργασίας αυτής είναι μέσα από υποδειγματικά λυμένες ασκήσεις να τονισθούν διάφορες τεχνικές διαχείρισης μιας αντίστροφης συνάρτησης και στις περιπτώσεις που είναι δυνατή η εύρεση τύπου για τον ορισμό της αλλά και στις περιπτώσεις που δεν είναι δυνατή η εύρεση τύπου.

Α. Είναι δυνατή η εύρεση τύπου για την αντίστροφη συνάρτηση

Θα ξεκινήσουμε τις παρατηρήσεις, τα σχόλια και τις τεχνικές από την εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης μιας συνάρτησης που αντιστρέφεται, για να δούμε κάποιες λεπτομέρειες, οι οποίες δεν θα πρέπει να μας διαφεύγουν.

Εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης

Καταρχάς να επισημάνουμε ότι όταν μας ζητείται γενικά να βρούμε μία συνάρτηση, μαζί με τον τύπο πρέπει να βρίσκουμε και το πεδίο ορισμού της, διότι, όπως γνωρίζουμε, τα βασικά στοιχεία μιας συνάρτησης είναι το πεδίο ορισμού, το σύνολο αφίξεως και η αντιστοίχιση που γίνεται. Ο τύπος μιας συνάρτησης απλώς είναι το μέσο, το εργαλείο, με το οποίο γίνεται η αντιστοίχιση. Αυτό πρέπει να κάνουμε και όταν θέλουμε να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης *f*. Για να βρούμε το πεδίο ορισμού της f^{-1} πρέπει να βρούμε το σύνολο τιμών της *f*. Επειδή όμως δεν γίνεται ειδι-

[1] Σε αυτήν την περίπτωση η αντίστροφη συνάρτηση με την έννοια της αντιστοίχισης υπάρχει και ορίζεται από την ισοδυναμία $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x,\ x\in D_f$, αλλά απλώς δεν μπορούμε να βρούμε τύπο με τον οποίο να ορίζεται. Γενικά, όταν αναφερόμαστε στην εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης για μια αντιστρέψιμη συνάρτηση, εννοούμε την εύρεση τύπου για τον ορισμό της και φυσικά και του πεδίου ορισμού της.

κή αναφορά στην αντίστοιχη ενότητα του σχολικού βιβλίου της Γ΄ Λυκείου για την εύρεση του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης f με αλγεβρικό τρόπο[2], το σύνολο τιμών της f θα το βρίσκουμε κατά την εύρεση του τύπου της f^{-1} θέτοντας κάθε φορά τους περιορισμούς που απαιτούνται για την μεταβλητή y, ώστε να ισχύει η ισοδυναμία. Πολύ κατατοπιστικές είναι η εφαρμογή του σχολικού βιβλίου (έκδοση 2014) στη σελίδα 155 καθώς και οι ασκήσεις που ακολουθούν.

Άσκηση 1: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2+\sqrt{x-1}$. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να βρείτε την f^{-1}.

Λύση

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι 1-1, οπότε αντιστρέφεται. Για να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση της f, θέτουμε $y = f(x)$ και λύνουμε ως προς x, δηλαδή έχουμε διαδοχικά:

$$
\begin{aligned}
f(x) = y \;&\Leftrightarrow\; 2+\sqrt{x-1} = y \\
&\Leftrightarrow\; \sqrt{x-1} = y-2 \\
&\Leftrightarrow\; x-1 = (y-2)^2, \quad y \geq 2 \\
&\Leftrightarrow\; x = 1+(y-2)^2, \quad y \geq 2.
\end{aligned}
$$

Άρα η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η συνάρτηση:

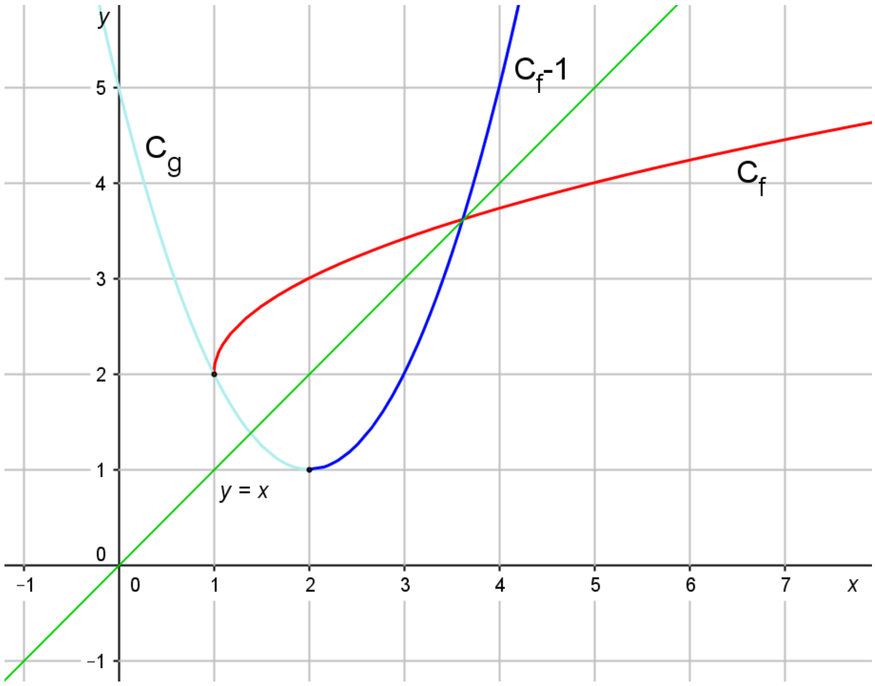
$$f^{-1}(x) = 1+(x-2)^2, \quad x \geq 2.$$

Παρατήρηση: Διαλέξαμε αυτή τη συνάρτηση, γιατί στο 3^{o} βήμα της εύρεσης της αντίστροφης πολλοί ξεχνούν να θέσουν τον περιορισμό για την μεταβλητή y, ώστε να ισχύει η ισοδυναμία. Αυτό συνήθως παρατηρείται κάθε φορά που έχουμε μια ρίζα τάξεως ν ($\nu > 1$) και πρέπει να υψώσουμε στη ν-οστή δύναμη και τα δύο μέλη της ισότητας.

Επίσης, εκείνο που πρέπει να σημειωθεί ακόμη και φαίνεται πολύ καθαρά στο παραπάνω παράδειγμα είναι ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} δεν προσδιορίζεται από τον τύπο της (αν μπορεί να βρεθεί), αλλά από το σύνολο τιμών της f. Έτσι λοιπόν μπορεί να προσδιορίζεται και από τους περιορισμούς που τίθενται για την μεταβλητή y κατά την διαδικασία εύρεσης της f^{-1}. Αξίζει να σημειωθεί ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} μπορεί να είναι ένα γνήσιο υποσύνολο του πεδίου ορισμού της παράστασης με την οποία ορίζεται. Μην ξεχνάμε ότι ο ρόλος της f^{-1} είναι πολύ συγκεκριμένος. Οπτικά αυτό φαίνεται στο επόμενο σχήμα στο οποίο παριστάνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} της παραπάνω άσκησης καθώς και η γραφική πα-

[2] Αναφέρεται μόνο ο γραφικός τρόπος. Η εύρεση του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης με τη βοήθεια της Ανάλυσης (συνέχεια, μονοτονία) διδάσκεται αργότερα.

ράσταση C_g της $g(x) = 1 + (x-2)^2$ όπου φαίνεται το τμήμα της που αποτελεί γραφική παράσταση της f^{-1}.



Το ίδιο παρατηρείται και στη συνάρτηση της επόμενης άσκησης στην οποία το σύνολο τιμών της f το βρίσκουμε και με την βοήθεια της Ανάλυσης[3].

Άσκηση 2: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 - \sqrt{9 - e^x}$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii) Να βρείτε την f^{-1}.

Λύση

i) Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της που είναι το σύνολο $A = (-\infty,\ \ln 9]$ και συνεπώς αντιστρέφεται.

ii) Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A = (-\infty,\ \ln 9]$, το σύνολο τιμών της είναι το $f(A) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\ f(\ln 9)\right] = (0,\ 3]$.

iii) Για να βρούμε τώρα την αντίστροφη συνάρτηση της f, θέτουμε $y = f(x)$ και λύνουμε ως προς x, δηλαδή έχουμε διαδοχικά:

[3] Για να δοθεί αυτός ο τρόπος εύρεσης του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης f θα πρέπει να έχει διδαχθεί η αντίστοιχη ενότητα.

$$f(x)=y \iff 3-\sqrt{9-e^x}=y$$

$$\iff \sqrt{9-e^x}=3-y$$

$$\iff 9-e^x=(3-y)^2, \quad y\le 3$$

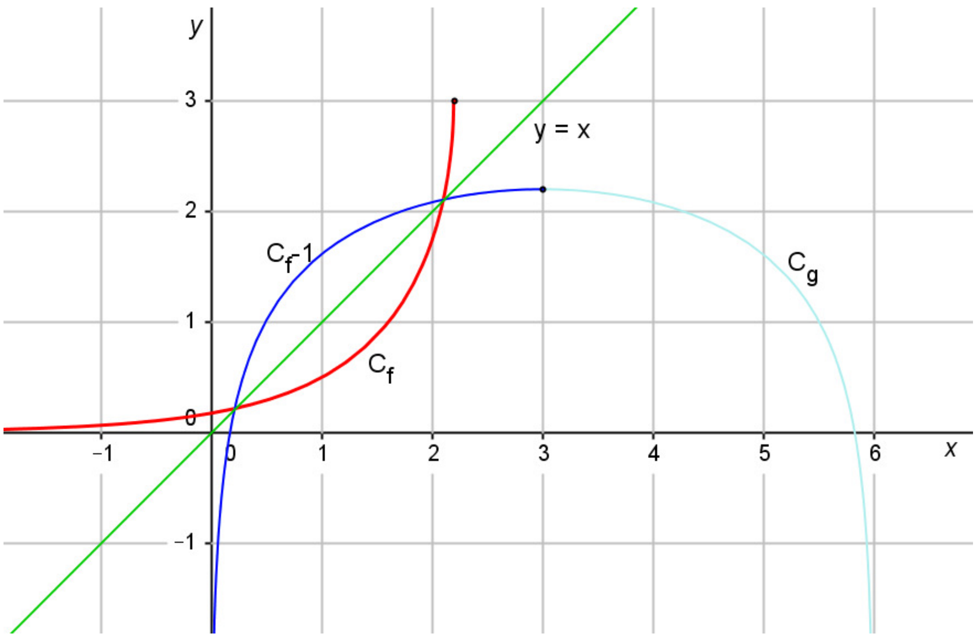
$$\iff e^x=9-(3-y)^2, \quad y\le 3$$

$$\iff x=\ln(6y-y^2), \quad 0<y\le 3$$

Άρα η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η συνάρτηση:

$$f^{-1}(x)=\ln(6x-x^2), \quad 0<x\le 3.$$

Παρατηρούμε ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι γνήσιο υποσύνολο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης $g(x)=\ln(6x-x^2)$, όπως φαίνεται και γραφικά στο σχήμα που ακολουθεί.



B. Δεν είναι δυνατή η εύρεση τύπου για την αντίστροφη συνάρτηση

Στην ενότητα αυτή θα δούμε πώς διαχειριζόμαστε την αντίστροφη συνάρτηση σε ασκήσεις, όταν δεν μπορούμε να βρούμε τύπο για την αντίστροφη εστιάζοντας μόνο στις περιπτώσεις της επίλυσης εξίσωσης της μορφής $f^{-1}(x)=x$, του ορίου, της παραγώγου και του ολοκληρώματος.

B$_1$: Επίλυση εξίσωσης της μορφής $f^{-1}(x) = x$

Όταν δεν μπορούμε να βρούμε τύπο για την αντίστροφη συνάρτηση και θέλουμε να λύσουμε μία εξίσωση σαν την παραπάνω, δηλ. να βρούμε τις τετμημένες των σημείων τομής της $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y = x$, τότε λύνουμε υποχρεωτικά την ισοδύναμή της εξίσωση $f(x) = x$ (τα σημεία τομής της $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y = x$ είναι τα ίδια με τα σημεία τομής της C_f με την ίδια ευθεία). Χαρακτηριστική είναι η επόμενη άσκηση.

<u>Άσκηση 3</u>: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4e^{x-2} + 4\ln\frac{x}{2} - x$. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

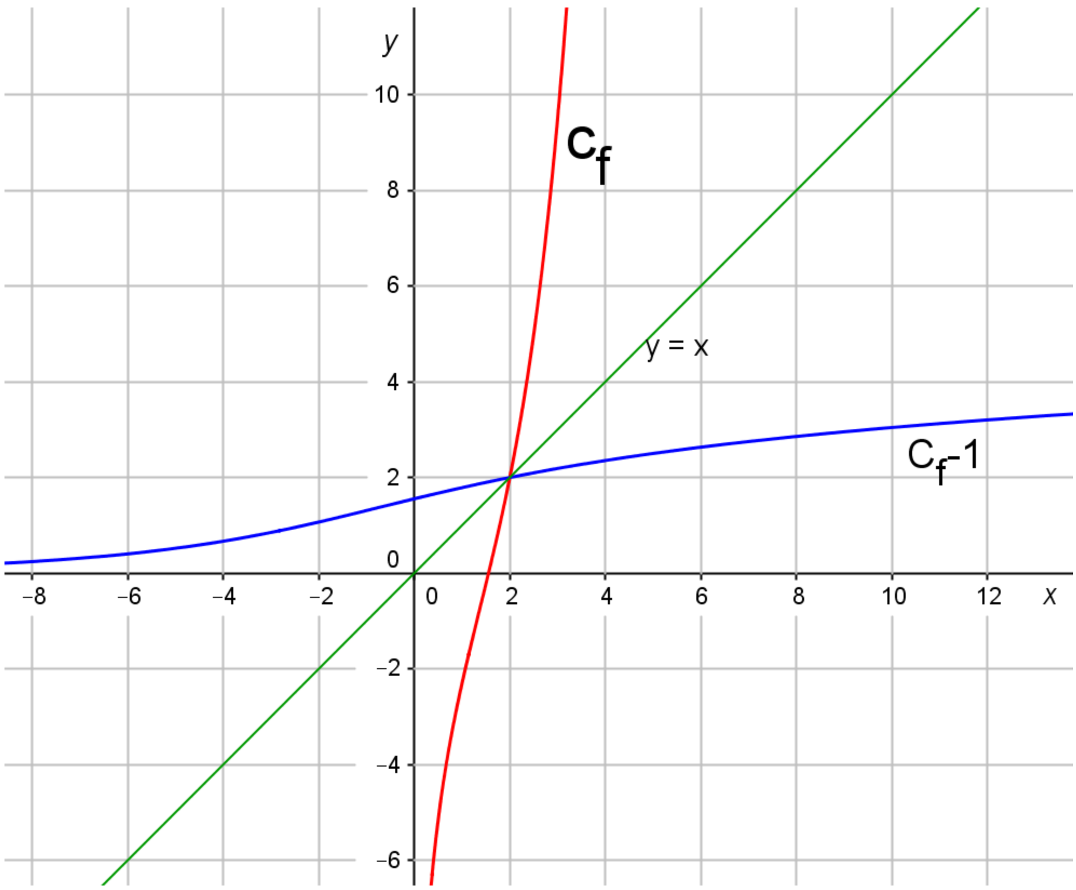
<u>Λύση</u>

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι αντιστρέφεται. Επειδή όμως δεν μπορούμε να βρούμε τύπο για την αντίστροφη συνάρτηση της f, για να λύσουμε την παραπάνω εξίσωση λύνουμε την ισοδύναμή της εξίσωση $f(x) = x$.

Λύνοντας την εξίσωση:

$$4e^{x-2} + 4\ln\frac{x}{2} - x = x$$

αρχικά βρίσκουμε ως προφανή ρίζα το 2 και στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι η ρίζα αυτή είναι μοναδική. Άρα η λύση της εξίσωσης $f^{-1}(x) = x$ είναι ο αριθμός 2. Το συμπέρασμα φαίνεται εποπτικά στο παρακάτω σχήμα.



B_2: Η αντίστροφη συνάρτηση σε όριο

Άσκηση 4: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}+x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^{-1}(x)-1}{x-2}$.

Λύση

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι αντιστρέψιμη. Όμως, δεν μπορούμε να βρούμε τύπο για την αντίστροφή της. Αφού δεν μπορούμε λοιπόν να βρούμε τύπο για την f^{-1}, για να υπολογίσουμε το παραπάνω όριο πρέπει να έχουμε κάποια πληροφορία για την συμπεριφορά της f^{-1} κοντά στο 2 (συνεχής, φραγμένη κλπ.), η οποία θα βοηθήσει στην εύρεση του ζητούμενου ορίου. Εδώ η f^{-1} είναι συνεχής στο 2 και αυτό θα πρέπει να δοθεί στην εκφώνηση της άσκησης.
Με δεδομένη λοιπόν τη συνέχεια της f^{-1} στο 2, όπου ισχύει:

$$\lim_{x\to 2} f^{-1}(x) = f^{-1}(2) = 1$$

προκύπτει απροσδιόριστη μορφή.

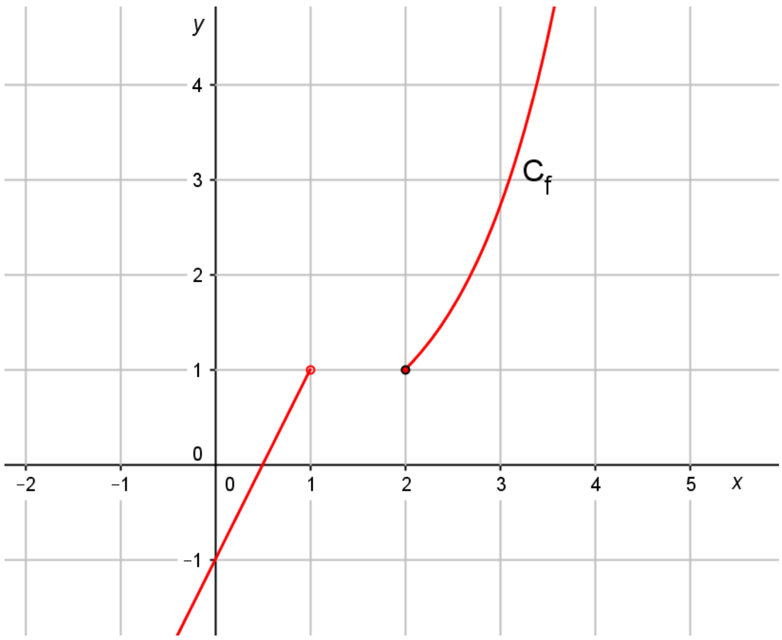
Επειδή δεν μπορούμε να βρούμε τύπο για την f^{-1}, για τον υπολογισμό του παραπάνω ορίου θέτουμε $u=f^{-1}(x)$, οπότε έχουμε $x=f(u)$ και το όριο υπολογίζεται ως εξής:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f^{-1}(x)-1}{x-2}=\lim_{u\to 1}\frac{u-1}{f(u)-2}=\lim_{u\to 1}\frac{u-1}{e^{u-1}+u-2}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{u\to 1}\frac{1}{e^{u-1}+1}=\frac{1}{2}.$$

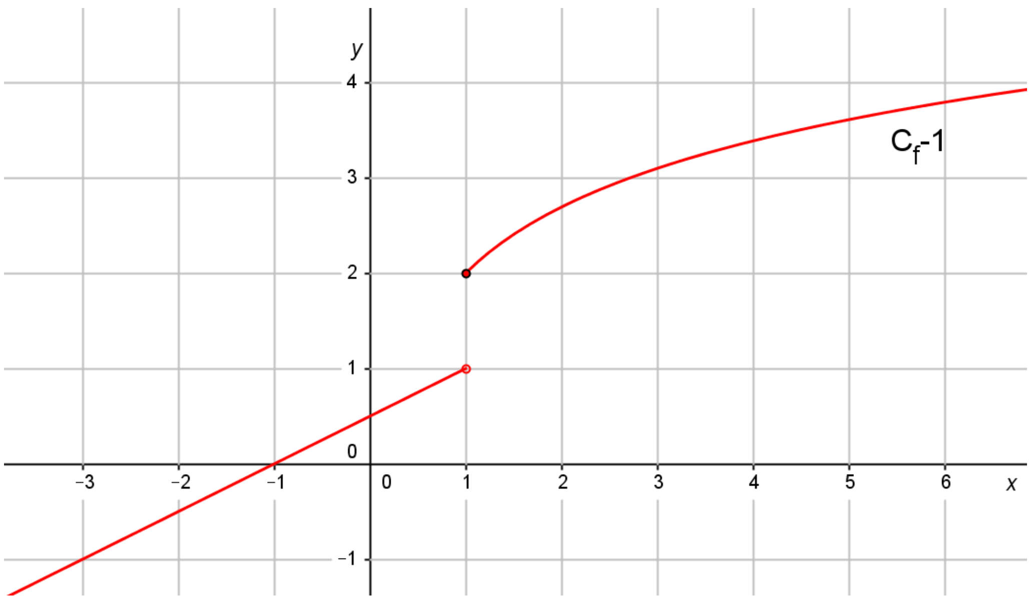
Παρατήρηση:. Όταν σε μία άσκηση ζητείται η εύρεση ενός ορίου μιας παράστασης που περιέχει μία αντίστροφη συνάρτηση για την οποία δεν μπορούμε να βρούμε τύπο, αν αυτή η αντίστροφη συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ή στο σημείο που ζητείται το όριο, τότε αυτό πρέπει να δίνεται, διότι η αντίστροφη συνάρτηση μιας συνεχούς αντιστρέψιμης συνάρτησης δεν είναι πάντα συνεχής. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}2x-1, x<1\\ e^{x-2}, x\geq 2\end{cases}$$

η οποία είναι 1-1 (οπότε αντιστρέφεται) και συνεχής στο πεδίο ορισμού της. Η γραφική παράσταση της f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Η αντίστροφη της f είναι η $f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}, x<1\\ \ln x+2, x\geq 1\end{cases}$ με γραφική παράσταση:



όπου φαίνεται καθαρά ότι δεν είναι συνεχής στο 1.
Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

«Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και αντιστρέφεται, τότε η αντίστροφή της είναι συνεχής στο f (Δ)».

Το θεώρημα όμως αυτό δεν αναφέρεται στο αντίστοιχο σχολικό βιβλίο και επομένως δεν μπορούμε να το επικαλούμαστε.

Άσκηση 5: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}+2x-3$. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και αν είναι γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf^{-1}(x)-2x}{xf^{-1}(x)-5\eta\mu x}.$$

Λύση

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι αντιστρέψιμη. Όμως, δεν μπορούμε να βρούμε τύπο για την αντίστροφή της. Η f^{-1} σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα είναι συνεχής στο 0, το οποίο και δίνεται, αφού δεν μπορούμε να το συμπεράνουμε, γιατί όπως είπαμε δεν αναφέρεται το παραπάνω θεώρημα στο σχολικό βιβλίο. Παρατηρούμε ότι η εφαρμογή των ιδιοτήτων των ορίων στην παραπάνω παράσταση οδηγεί σε απροσδιόριστη μορφή. Για τον υπολογισμό του ορίου αυτού δεν είναι αναγκαία η αλλαγή μεταβλητής, διότι μπορεί να υπολογιστεί και διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με x ως εξής:

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf^{-1}(x)-2x}{xf^{-1}(x)-5\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{f^{-1}(x)-2}{f^{-1}(x)-5\dfrac{\eta\mu x}{x}}=\frac{1-2}{1-5}=\frac{1}{4},$$

αφού $\lim\limits_{x\to 0}f^{-1}(x)=f^{-1}(0)=1$ λόγω της συνέχειας της f^{-1} στο 0.

Ας δούμε ακόμη δύο όρια παραστάσεων που περιέχουν μία αντίστροφη συνάρτηση με το x να τείνει στο άπειρο, για να δούμε αν απαιτείται και στην περίπτωση αυτή η συνέχεια της f^{-1}.

Άσκηση 6: Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to IR$ με τύπο $f(x)=e^x-\dfrac{1}{x}+2$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και στη συνέχεια να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f^{-1}(x)-2}{3f^{-1}(x)-x}\qquad \text{και}\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)-2}{3f^{-1}(x)-x}.$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε το σύνολο τιμών της βρίσκεται ότι είναι το σύνολο: $f\big((0,\ +\infty)\big)=(-\infty,\ +\infty)$.

Επίσης, η f είναι 1-1 αφού είναι γνησίως αύξουσα, οπότε αντιστρέφεται. Δεν μπορούμε όμως να βρούμε τύπο για την f^{-1}.

Το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το σύνολο: $f^{-1}\big((-\infty,\ +\infty)\big)=(0,\ +\infty)$.

Είναι φανερό ότι ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty}f^{-1}(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{-1}(x)=+\infty$.

Πώς όμως θα το συμπεράνουμε αυτό; Δεν θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα; Επειδή λοιπόν πράγματι η f^{-1} είναι συνεχής σύμφωνα με το θεώρημα που αναφέρθηκε παραπάνω πρέπει να δοθεί.

Σχετικά με την μονοτονία της f^{-1} ισχύει το θεώρημα:

«Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε και η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη και έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f ».

Όμως, ούτε και αυτό το θεώρημα αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο.

Όταν μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε η μονοτονία της f^{-1} αποδεικνύεται εύκολα με απαγωγή σε άτοπο και αυτό πρέπει να κάνουμε κάθε φορά που την χρειαζόμαστε και δεν μας δίνεται.

Σχετικά τώρα με τον υπολογισμό των ορίων που ζητούνται στην παραπάνω άσκηση, για μεν το πρώτο δεν απαιτείται αλλαγή μεταβλητής, ενώ για το δεύτερο απαιτείται. Έτσι λοιπόν έχουμε:

Α. (Υπολογισμός του πρώτου ορίου)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f^{-1}(x)-2}{3f^{-1}(x)-x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3f^{-1}(x)-x}\cdot(f^{-1}(x)-2)\right)=0\cdot(-2)=0\,,$$

διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3f^{-1}(x)-x\right)=+\infty$.

Β. (Υπολογισμός του δεύτερου ορίου)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)-2}{3f^{-1}(x)-x}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u-2}{3u-e^u+\frac{1}{u}-2}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u\left(1-\frac{2}{u}\right)}{u\left(3-\frac{e^u}{u}+\frac{1}{u^2}-\frac{2}{u}\right)}=0\,,$$

αφού $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{e^u}{u}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{e^u}{1}=+\infty$.

B$_3$: Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης

__**Άσκηση 7:**__ Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\ln x+4$. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο σημείο 5, να βρεθεί η παράγωγος της f^{-1} στο 5.

__**Λύση**__

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη (η f είναι παραγωγίσιμη με θετική παράγωγο κλπ.). Δεν μπορούμε όμως να βρούμε τύπο για την αντίστροφή της.

Όπως γνωρίζουμε, ο τύπος της παραγώγου της σύνθετης συνάρτησης ή κανόνας της αλυσίδας έχει σημειακό χαρακτήρα (δείτε αντίστοιχο θεώρημα στο σχολικό βιβλίο στη σελίδα 234), δηλαδή αναφέρεται σε σημεία, οπότε από την σχέση:

$$f^{-1}(f(x)) = x,\ \ x \in D_f \qquad (1)$$

και αφού η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο 5 και $f(1) = 5$ έχουμε διαδοχικά:

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(1)\right)\cdot f'(1) = 1$$

$$\text{ή } \left(f^{-1}\right)'(5)\cdot 3 = 1$$

$$\text{ή } \left(f^{-1}\right)'(5) = \frac{1}{3}.$$

<u>Παρατήρηση:</u> Αν δε δοθεί ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο 5, τότε πρέπει να εργαστούμε με τον ορισμό. Στην περίπτωση όμως αυτή πρέπει να δοθεί ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο 5. Έτσι θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 5}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(5)}{x-5} = \lim_{u\to 1}\frac{u-1}{f(u)-5} = \lim_{u\to 1}\frac{u-1}{u^2+\ln u-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{u\to 1}\frac{1}{2u+\frac{1}{u}} = \frac{1}{3}.$$

Αν τώρα μας ζητείται να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει η παράγωγος της f^{-1} σε ένα σημείο y_o, όπου $y_o = f(x_o)$ για κάποιο $x_o \in D_f$, στο οποίο όμως είναι συνεχής, τότε κανονικά πρέπει να εργαστούμε με τον ορισμό. Αν όμως είναι $f'(x_o) = 0$, τότε μπορούμε να εργαστούμε και με απαγωγή σε άτοπο με τη βοήθεια του τύπου (1). Χαρακτηριστική είναι η επόμενη άσκηση.

<u>Άσκηση 8:</u> Δίνεται η συνάρτηση $f:\ [1,+\infty)\ \to\ I\!R$ με $f(x) = x^2 - 2\ln x + 9$. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο 10.

<u>Λύση</u>

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι αντιστρέψιμη ($f'(x) > 0$ για κάθε $x > 1$ κλπ.), αλλά δεν μπορούμε να βρούμε τύπο για την αντίστροφή της. Ακόμη, παρατηρούμε ότι $f(1) = 10$, οπότε $f^{-1}(10) = 1$ και πως $f'(1) = 0$.

Ας προσπαθήσουμε αρχικά να αποδείξουμε ότι η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο 10 με τη βοήθεια του ορισμού, όπου όμως θα πρέπει να έχει δοθεί ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο 10. Έχουμε λοιπόν:

$$\lim_{x\to 10}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(10)}{x-10}=\lim_{u\to 1}\frac{u-1}{f(u)-10}=\lim_{u\to 1}\frac{u-1}{u^2-2\ln u-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{u\to 1}\frac{1}{2u-\frac{2}{u}}=$$

$$=\lim_{u\to 1}\frac{u}{2u^2-2}=\lim_{u\to 1}\frac{u}{2(u-1)(u+1)}=\lim_{u\to 1}\left(\frac{1}{u-1}\cdot\frac{u}{2(u+1)}\right)=+\infty$$

Επειδή το παραπάνω όριο δεν είναι πραγματικός αριθμός συμπεραίνουμε ότι η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο 10 .

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, αφού είναι $f'(1)=0$, μπορούμε να εργαστούμε και με απαγωγή σε άτοπο, όπου δεν χρειάζεται να μας δοθεί ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο 10, ως εξής:
Έστω ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο 10. Αφού $f(1) = 10$ από την (1) θα έχουμε:

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(1)\right)\cdot f'(1)=1 \quad\quad ή \quad\quad \left(f^{-1}\right)'(10)\cdot 0=1,$$

που είναι άτοπο. Άρα η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο 10.

<u>**Σημείωση:**</u> Όπως διατυπώνεται η άσκηση (δεν δίνεται η συνέχεια της f^{-1}) ο ενδεδειγμένος τρόπος λύσης είναι ο δεύτερος.

B$_4$: Ολοκλήρωμα αντίστροφης συνάρτησης

Όταν μας ζητείται να υπολογίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f για ένα διάστημα [α, β], τότε μπορούμε να κάνουμε αλλαγή μεταβλητής θέτοντας

$$u=f^{-1}(x)\quad (2)$$

που είναι συμβατή με την θεωρία του αντίστοιχου σχολικού βιβλίου, όπου προτείνεται η νέα μεταβλητή να εκφράζεται ως συνάρτηση της υπάρχουσας μεταβλητής (δείτε σχολικό βιβλίο στη σελίδα 337). Όμως, επειδή είναι δύσκολο να βρούμε με τον τύπο (2) το διαφορικό du συνεχίζουμε ως εξής:

Από την σχέση (2) *παίρνουμε ισοδύναμα* $x=f(u)$, *οπότε έχουμε* $dx=f'(u)du$ *και στη συνέχεια προσδιορίζουμε τα νέα όρια του ορισμένου ολοκληρώματος για την μεταβλητή u.*

Όμως για τυπικούς λόγους[4] και εδώ θα πρέπει να δίνεται ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο [α, β] για να γνωρίζουμε ότι είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann και να μπορούμε έτσι να ακολουθούμε την παραπάνω διαδικασία.

[4] Στο αντίστοιχο σχολικό βιβλίο η συνέχεια μιας συνάρτησης f στο [α, β] δίνεται ως ικανή συνθήκη (όχι και αναγκαία) για να είναι η f ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο [α, β].

Ως παράδειγμα θα αναφέρουμε την άσκηση (**Άσκηση 9**) του 3ου θέματος των πανελλαδικών εξετάσεων του έτους 2003, το οποίο είναι:

«ΘΕΜΑ 3ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

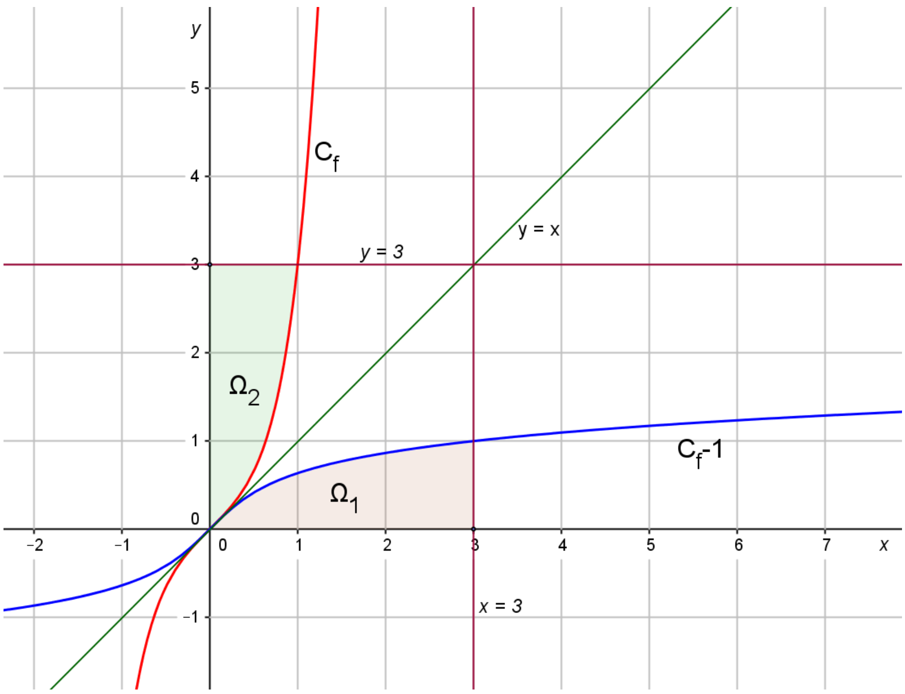
β. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ *για κάθε* $x \in IR$.

γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} .

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} *, τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση x = 3».*

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση *f* είναι αντιστρέψιμη, αλλά και εδώ δεν μπορούμε να βρούμε τύπο για την αντίστροφή της.

Θα επικεντρωθούμε στο ερώτημα *δ΄* στο οποίο ζητείται ο υπολογισμός του εμβαδού του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 3$. Στο παρακάτω σχήμα στο οποίο φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων *f* και f^{-1} είναι το χωρίο Ω_1.



Επειδή $f(0) = 0$, $f(1) = 3$ και η *f* είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο [0, 1] είναι $f([0, 1]) = [0, 3]$, οπότε $f^{-1}([0, 3]) = [0, 1]$. Συνεπώς ισχύει $f^{-1}(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 3]$, οπότε έχουμε:

$$E(\Omega_1) = \int_0^3 f^{-1}(x)dx .$$

Τυπικά όμως δεν γνωρίζουμε ότι η f^{-1} είναι ολοκληρώσιμη στο [0, 3], διότι δεν δίνεται στην εκφώνηση της άσκησης ότι είναι συνεχής, εκτός και αν το συμπεράνουμε διαισθητικά από τη γραφική παράσταση, την οποία καλό είναι να χαράξουμε.

Αν θέλουμε λοιπόν να υπολογίσουμε το παραπάνω ορισμένο ολοκλήρωμα σύμφωνα με τον μετασχηματισμό $u = f^{-1}(x)$, τότε παίρνουμε:

$$x = f(u) = u^5 + u^3 + u \quad \text{και} \quad dx = f'(u)du = (5u^4 + 3u^2 + 1)du$$

ακόμη, για $x = 0$ είναι $u = 0$ και για $x = 3$ είναι $u = 1$. Έτσι έχουμε:

$$E(\Omega_1) = \int_0^3 f^{-1}(x)dx = \int_0^1 uf'(u)du = \int_0^1 (5u^5 + 3u^3 + u)du = \frac{25}{12} \text{ τ.μ.}$$

ή

$$E(\Omega_1) = \int_0^3 f^{-1}(x)dx = \int_0^1 uf'(u)du = \left[uf(u)\right]_0^1 - \int_0^1 f(u)du = \frac{25}{12} \text{ τ.μ.}$$

<u>**Σημείωση:**</u> Με τον μετασχηματισμό που γίνεται, η συνάρτηση που προκύπτει είναι ολοκληρώσιμη ως συνεχής και έτσι υπολογίζεται το ολοκλήρωμα $\int_0^3 f^{-1}(x)dx$. Αυτό μπορεί να δοθεί ως επιχείρημα-αιτιολόγηση από μαθητές για την ύπαρξη του ολοκληρώματος αυτού παρακάμπτοντας έτσι τη συνέχεια της f^{-1}, που δεν δίνεται, και θεωρώ ότι θα πρέπει να γίνει αποδεκτό.

Αν, τώρα, κάποιος μαθητής για την εύρεση του εμβαδού του χωρίου Ω_1 δεν μπορεί να υπολογίσει το ολοκλήρωμα $\int_0^3 f^{-1}(x)dx$ όπως παραπάνω, εναλλακτικά μπορεί να υπολογίσει τον εμβαδόν του χωρίου Ω_2 που είναι ίσο με το χωρίο Ω_1 λόγω της συμμετρίας, οπότε θα γίνει ολοκλήρωση της συνάρτησης f που γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής και επομένως ολοκληρώσιμη. Δηλαδή έχουμε:

$$E(\Omega_1) = E(\Omega_2) = \int_0^1 \left(3 - f(x)\right)dx = \int_0^1 \left(3 - x^5 - x^3 - x\right)dx = \frac{25}{12} \text{ τ.μ.}$$

Επίλογος

Κλείνοντας, πιστεύω πως έγινε κατανοητό το πνεύμα της εργασίας, δηλαδή ότι η αντίστροφη συνάρτηση μιας συνάρτησης που αντιστρέφεται είναι μια κανονική συνάρτηση και πως ιδιότητες και χαρακτηριστικά της μπορούν να μελετηθούν ανεξάρτητα από το αν μπορεί ή όχι να βρεθεί τύπος με τον οποίον να ορίζεται.