Λύνοντας ασκήσεις με αντίστροφες συναρτήσεις

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
πρώην Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

Πρόλογος

Η αντίστροφη συνάρτηση μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f (συμβολικά f^{-1}) είναι μία κανονική συνάρτηση[1] και επομένως ως προς την συμπεριφορά δεν διαφέρει από τις υπόλοιπες συναρτήσεις. Όταν δεν μπορεί να βρεθεί τύπος για τον ορισμό της f^{-1}, τότε, όπως θα δούμε και στην εργασία αυτή, οι ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά της μπορούν να μελετηθούν με την βοήθεια της συνάρτησης f.

Η εργασία χωρίζεται σε δύο ενότητες. Στην πρώτη ενότητα βρίσκονται οι αντίστροφες συναρτήσεις δύο αντιστρέψιμων συναρτήσεων, οι οποίες συνοδεύονται με σχόλια τα οποία δεν πρέπει να μας διαφεύγουν. Στην δεύτερη ενότητα αναφέρονται και αναλύονται, με την βοήθεια ασκήσεων που λύνονται υποδειγματικά, τεχνικές διαχείρισης της αντίστροφης συνάρτησης στην περίπτωση που δεν μπορεί να βρεθεί τύπος για τον ορισμό της[2].

Α. Εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης

Όταν θέλουμε γενικά να βρούμε μία συνάρτηση, μαζί με τον τύπο της πρέπει να βρούμε και το πεδίο ορισμού της, διότι, όπως γνωρίζουμε, τα βασικά στοιχεία μιας συνάρτησης είναι το πεδίο ορισμού, το σύνολο αφίξεως και το γράφημα, δηλαδή το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών που δημιουργούνται με την αντιστοίχιση (ο τύπος είναι το μέσο με το οποίο γίνεται η αντιστοίχιση). Έτσι λοιπόν, όταν θέλουμε να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση[3] μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης, τότε, εκτός από τον τύπο, πρέπει να βρούμε και το πεδίο ορισμού της.

Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f ή αλλιώς το σύνολο τιμών της f, όταν η f ορίζεται με έναν τύπο και το

[1] Όταν μία συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη, τότε η αντίστροφη συνάρτησή της f^{-1}ορίζεται από την ισοδυναμία $f(x)=y \Leftrightarrow f^{-1}(y)=x,\ x\in D_f$ και δεν είναι υποχρεωτικό να υπάρχει τύπος με τον οποίο να ορίζεται. Να σημειωθεί ότι υπάρχουν αντίστροφες συναρτήσεις για τις οποίες δεν μπορεί να βρεθεί τύπος για τον ορισμό τους.

[2] Είναι ευνόητο ότι οι τεχνικές αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν και στην περίπτωση που μπορεί να βρεθεί τύπος για τον ορισμό της αντίστροφης. Η διαφορά είναι ότι στην περίπτωση αυτή για την λύση των ασκήσεων, αν θέλουμε, μπορούμε να χρησιμοποιούμε και τον τύπο της αντίστροφης.

[3] Εννοείται στην περίπτωση που μπορεί να βρεθεί τύπος για τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης.

πεδίο ορισμού της είναι ίσο με το πεδίο ορισμού της παράστασης με την οποία ορίζεται (δηλ. δεν υπάρχουν επιπλέον περιορισμοί για το x), θα το βρίσκουμε κατά την εύρεση του τύπου[4] της f^{-1} όπου σε κάθε βήμα πρέπει να θέτουμε περιορισμούς, αν απαιτούνται, για την μεταβλητή y, ώστε να ισχύει η ισοδυναμία. Πολύ κατατοπιστικές σχετικά με το θέμα αυτό είναι η εφαρμογή του σχολικού βιβλίου των Μαθηματικών της Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου στην αντίστοιχη ενότητα και οι δύο ασκήσεις που ακολουθούν.

<u>Άσκηση 1</u>: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 + \sqrt{x-1}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και στη συνέχεια να βρείτε την f^{-1}.

<u>Λύση</u>

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι 1-1, οπότε αντιστρέφεται. Για να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση της f, θέτουμε $y = f(x)$ και λύνουμε ως προς x. Έτσι λοιπόν για $x \geq 1$ έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} f(x) = y \ &\Leftrightarrow\ 2 + \sqrt{x-1} = y \\ &\Leftrightarrow\ \sqrt{x-1} = y - 2 \\ &\Leftrightarrow\ x - 1 = (y-2)^2, \quad y \geq 2 \\ &\Leftrightarrow\ x = 1 + (y-2)^2 = y^2 - 4y + 5, \quad y \geq 2. \end{aligned}$$

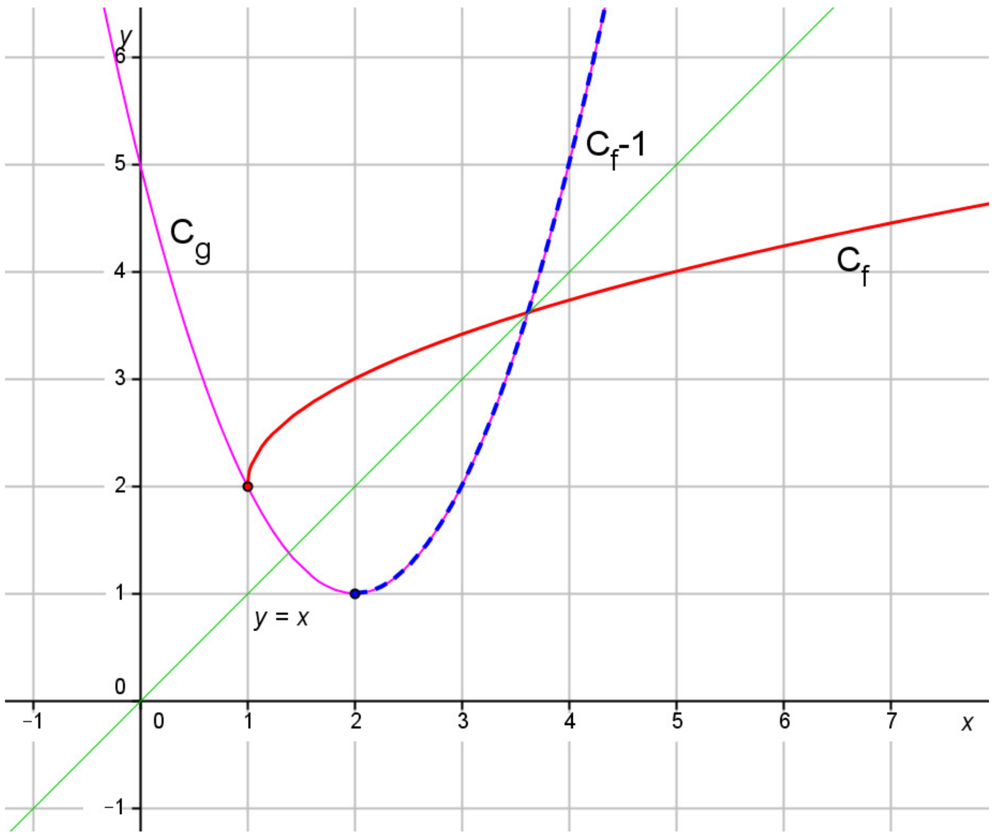
Άρα η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η συνάρτηση:

$$f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5, \quad x \geq 2.$$

<u>Σημείωση</u>: Επιλέχτηκε η συγκεκριμένη συνάρτηση, γιατί στο $3^{\text{ο}}$ βήμα της εύρεσης της αντίστροφης πολλοί ξεχνούν να θέσουν τον περιορισμό για την μεταβλητή y, ώστε να ισχύει η ισοδυναμία. Αυτό παρατηρείται και κάθε φορά που έχουμε μια ρίζα τάξεως ν > 1 και πρέπει να υψώσουμε στη ν-οστή δύναμη και τα δύο μέλη της ισότητας. Εκείνο όμως που πρέπει να σημειωθεί γενικότερα είναι ότι στην περίπτωση που μπορεί να βρεθεί τύπος για τον ορισμό της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, το πεδίο ορισμού της f^{-1}, επειδή είναι το σύνολο τιμών της f, δεν προσδιορίζεται από τον τύπο της. Γι' αυτό, όταν δίνουμε μια αντίστροφη συνάρτηση, μαζί με τον τύπο πρέπει πάντα να δίνουμε και το πεδίο ορισμού της. Υπάρχει περίπτωση, όπως βλέπουμε και στην παραπάνω άσκηση, το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης να είναι γνήσιο υποσύνολο του πεδίου ορισμού της παράστασης με την οποία ορίζεται. Εποπτικά αυτό φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, στο οποίο παριστάνονται οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων f και f^{-1} της

[4] Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών της Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου πριν την έννοια της αντίστροφης συνάρτησης υποδεικνύεται μόνο ο γραφικός τρόπος εύρεσης του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης, οπότε, μέχρι να διδαχθεί το θεώρημα εύρεσης του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης με την βοήθεια της συνέχειας και της μονοτονίας της, για τους μαθητές, αυτός ο τρόπος εύρεσης του πεδίου ορισμού της f^{-1} θα είναι ο μοναδικός.

παραπάνω άσκησης καθώς και της $g(x)=x^2-4x+5$ που έχει τον ίδιο τύπο με την f^{-1} της ίδιας άσκησης. Στο σχήμα βλέπουμε το τμήμα της C_g που αποτελεί την γραφική παράσταση της f^{-1}.



Το ίδιο παρατηρείται και στη συνάρτηση της επόμενης άσκησης της οποίας το σύνολο τιμών το βρίσκουμε εκτός από τον τρόπο που περιγράφεται παραπάνω και με την βοήθεια της συνέχειας και της μονοτονίας της. Για να μπορεί όμως να χρησιμοποιηθεί αυτός ο τρόπος εύρεσης του συνόλου τιμών μιας συνάρτησης, ο οποίος είναι απαραίτητος σε μερικές περιπτώσεις, θα πρέπει να έχει διδαχθεί η αντίστοιχη ενότητα.

<u>Άσκηση 2</u>: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=3-\sqrt{9-e^x}$.

i) **Να μελετήσετε την *f* ως προς την μονοτονία και να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.**

ii) **Να βρείτε το σύνολο τιμών της *f* .**

iii) **Να βρείτε την f^{-1}.**

<u>Λύση</u>

i) Εύκολα αποδεικνύεται ότι η *f* είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της που είναι το σύνολο $A = (-\infty,\ \ln 9]$, οπότε αντιστρέφεται.

ii) Επειδή η *f* είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, το σύνολο τιμών της είναι το σύνολο $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\ f(\ln 9)\right]=(0,\ 3]$.

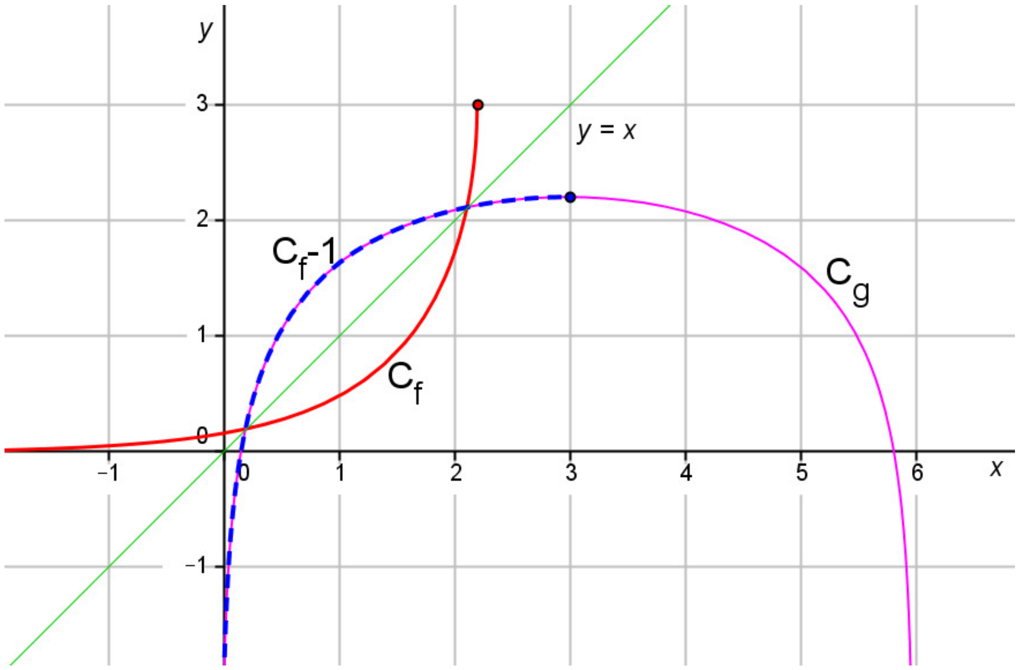
iii) Για να βρούμε την αντίστροφη συνάρτηση της *f*, θέτουμε $y = f(x)$ και λύνουμε ως προς *x*. Έτσι λοιπόν για $x \le \ln 9$ έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} f(x) = y \;\Leftrightarrow\; & 3 - \sqrt{9 - e^x} = y \\ \Leftrightarrow\; & \sqrt{9 - e^x} = 3 - y \\ \Leftrightarrow\; & 9 - e^x = (3 - y)^2, \quad y \le 3 \\ \Leftrightarrow\; & e^x = 9 - (3 - y)^2, \quad y \le 3 \\ \Leftrightarrow\; & x = \ln(6y - y^2), \quad 0 < y \le 3 \end{aligned}$$

Άρα η αντίστροφη συνάρτηση της *f* είναι η συνάρτηση:

$$f^{-1}(x) = \ln(6x - x^2), \quad 0 < x \le 3\,.$$

Παρατηρούμε ότι το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι γνήσιο υποσύνολο του πεδίου ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \ln(6x - x^2)$ που έχει τον ίδιο τύπο με την f^{-1} (το πεδίο ορισμού της *g* είναι το $D_g = (0, 6)$). Εποπτικά αυτό φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί.



B. Διαχείριση της αντίστροφης συνάρτησης σε ασκήσεις όταν δεν μπορεί να βρεθεί τύπος για τον ορισμό της

Στην ενότητα αυτή θα δούμε πώς διαχειριζόμαστε την αντίστροφη συνάρτηση σε ασκήσεις, όταν δεν μπορούμε να βρούμε τύπο για τον ορισμό της, εστιάζοντας στις περιπτώσεις επίλυσης εξισώσεων της μορφής $f^{-1}(x) = x$ και υπολογισμού ορίων, παραγώγων και ολοκληρωμάτων.

B_1: Επίλυση μιας εξίσωσης της μορφής $f^{-1}(x) = x$

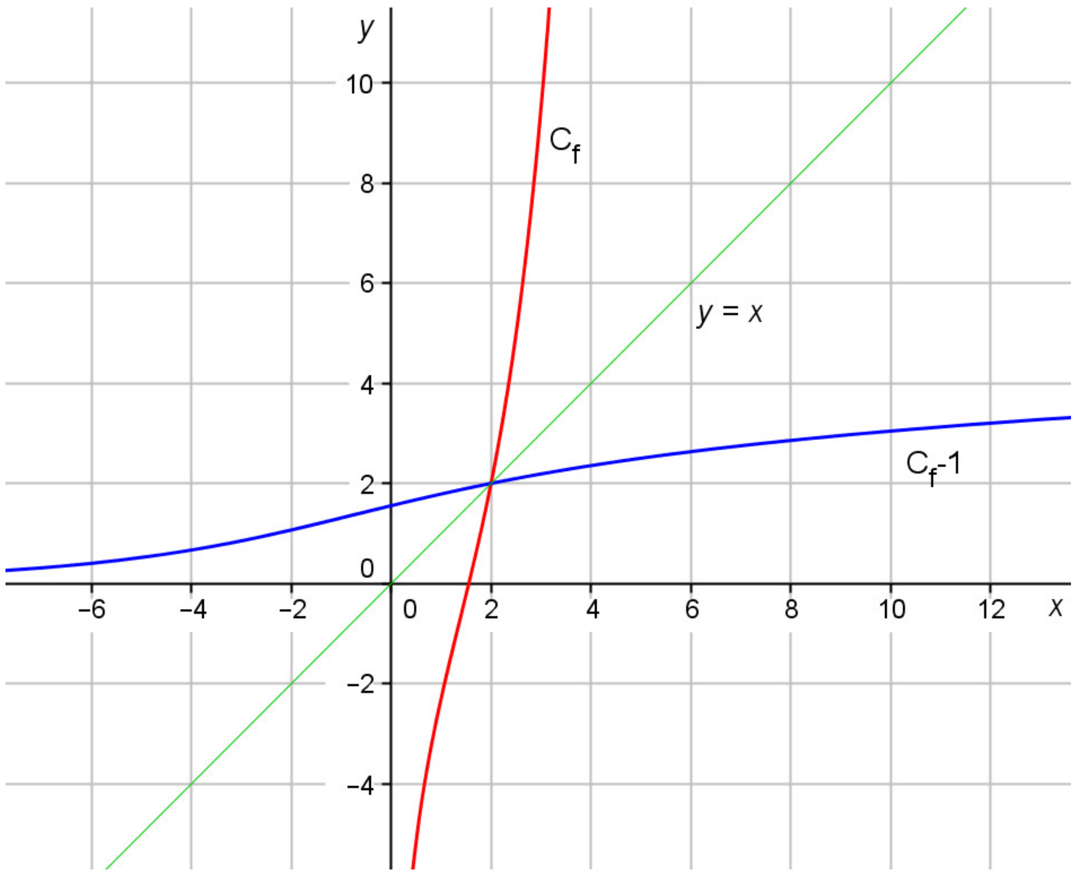
Όταν δεν μπορεί να βρεθεί τύπος για την αντίστροφη συνάρτηση και θέλουμε να λύσουμε μία εξίσωση σαν την παραπάνω, δηλαδή να βρούμε τις τετμημένες των σημείων τομής της $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y = x$, τότε λύνουμε υποχρεωτικά την ισοδύναμή της εξίσωση $f(x) = x$, διότι τα σημεία τομής της $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y = x$ (αν υπάρχουν) είναι τα ίδια με τα σημεία τομής της C_f με την ίδια ευθεία. Χαρακτηριστική είναι η επόμενη άσκηση.

<u>Άσκηση 3</u>: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4e^{x-2} + 4\ln\frac{x}{2} - x$. Να αποδείξετε ότι η *f* αντιστρέφεται και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$.

<u>Λύση</u>

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η *f* είναι γνησίως αύξουσα και αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι αντιστρέφεται. Επειδή όμως δεν μπορούμε να βρούμε τύπο για την f^{-1}, για να λύσουμε την παραπάνω εξίσωση λύνουμε την ισοδύναμή της εξίσωση $f(x) = x$, δηλαδή την εξίσωση $4e^{x-2} + 4\ln\frac{x}{2} - x = x$.

Λύνοντας την τελευταία εξίσωση αρχικά βρίσκουμε ως προφανή ρίζα το 2 και στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι το 2 είναι η μοναδική της ρίζα. Άρα η λύση της εξίσωσης $f^{-1}(x) = x$ είναι ο αριθμός 2. Εποπτικά το συμπέρασμα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



B_2: Η αντίστροφη συνάρτηση σε όριο

Πολλές φορές στην παράσταση της οποίας ζητείται κάποιο όριο περιέχεται μια αντίστροφη συνάρτηση για την οποία δεν μπορεί να βρεθεί τύπος. Στις τέσσερις επόμενες ασκήσεις θα δούμε πώς μπορούμε να διαχειριστούμε την αντίστροφη συνάρτηση σε τέτοια όρια και τί πληροφορίες απαιτούνται για την αντίστροφη προκειμένου να γίνει ο υπολογισμός των ορίων.

<u>Άσκηση 4</u>: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}+x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και στη συνέχεια να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f^{-1}(x)-1}{x^2-4}$.

<u>Λύση</u>

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι αντιστρέψιμη. Όμως, δεν μπορεί να βρεθεί τύπος για την αντίστροφή της. Αφού λοιπόν δεν μπορούμε να βρούμε τύπο για την f^{-1}, για να υπολογίσουμε το παραπάνω όριο πρέπει να έχουμε κάποια πληροφορία σχετικά με την συμπεριφορά της f^{-1} κοντά στο 2 (συνεχής, φραγμένη κλπ.), η οποία θα βοηθήσει στην εύρεση του ζητούμενου ορίου. Εδώ η f^{-1} είναι συνεχής στο 2 και αυτό πρέπει να δοθεί στην εκφώνηση της άσκησης.

Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των ορίων στο ζητούμενο όριο και με δεδομένη την συνέχεια της f^{-1} στο 2, όπου ισχύει $\lim\limits_{x\to 2} f^{-1}(x)=f^{-1}(2)=1,$ προκύπτει απροσδιόριστη μορφή.

Επειδή δεν μπορούμε να βρούμε τύπο για την f^{-1}, για τον υπολογισμό του παραπάνω ορίου θέτουμε $u=f^{-1}(x)$, οπότε έχουμε ισοδύναμα $x=f(u)$ και το ζητούμενο όριο υπολογίζεται ως εξής:

$$\lim_{x\to 2}\frac{f^{-1}(x)-1}{x^2-4}=\lim_{u\to 1}\frac{u-1}{f^2(u)-4}=\lim_{u\to 1}\frac{u-1}{\left(e^{u-1}+u\right)^2-4}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{u\to 1}\frac{1}{2\left(e^{u-1}+u\right)(e^{u-1}+1)}=\frac{1}{8}.$$

Όταν σε μία άσκηση ζητείται η εύρεση ενός ορίου μιας παράστασης που περιέχει μία αντίστροφη συνάρτηση για την οποία δεν μπορεί να βρεθεί τύπος, αν αυτή η αντίστροφη συνάρτηση είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της ή στο σημείο που ζητείται το όριο, τότε αυτό πρέπει να δίνεται. Πρέπει να δίνεται, γιατί δεν μπορούμε να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα σχετικά με την συνέχεια της αντίστροφης συνάρτησης, επειδή δεν μας καλύπτει η θεωρία του σχολικού βιβλίου στο οποίο δεν περιέχεται το παρακάτω θεώρημα που αναφέρεται στην συνέχεια της αντίστροφης συνάρτησης.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1:

Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ, τότε η αντίστροφή της είναι συνεχής στο f (Δ).

Μία απόδειξη του θεωρήματος αυτού μπορείτε να βρείτε στο βιβλίο του Δημητρίου Α. Κάππου: «*Μαθήματα Αναλύσεως - Απειροστικός Λογισμός*» (Αθήνα 1962), τεύχος Α΄, σελίδα 201.

Παρατηρούμε ότι γενικά η συνέχεια μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης *f* δεν αρκεί για να είναι η αντίστροφή της συνεχής. Πρέπει επιπλέον να ορίζεται και σε διάστημα. Όταν μια συνεχής και αντιστρέψιμη συνάρτηση ορίζεται σε ένωση ξένων διαστημάτων, τότε, όπως θα δούμε και στο παρακάτω παράδειγμα, η αντίστροφή της μπορεί να μην είναι συνεχής.

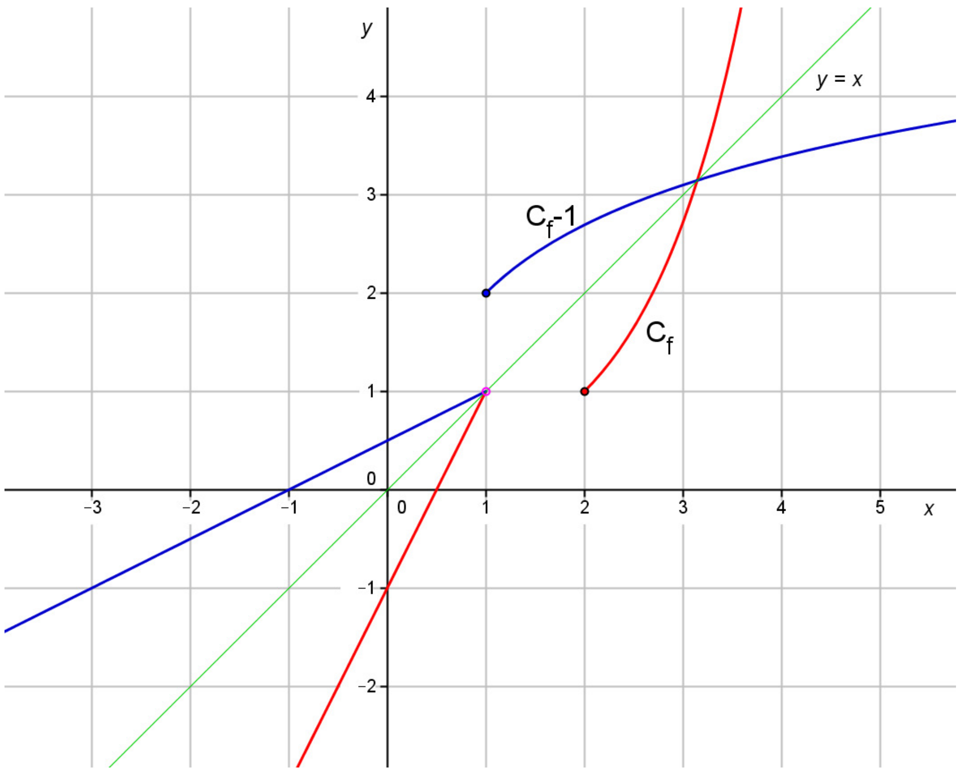
Παράδειγμα: Έστω η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}2x-1, & x<1\\ e^{x-2}, & x\geq 2\end{cases}.$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι αυτή η συνάρτηση είναι συνεχής και αντιστρέψιμη. Επίσης, εύκολα βρίσκεται ότι η αντίστροφή της είναι η συνάρτηση:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{2}, & x<1\\ \ln x+2, & x\geq 1\end{cases},$$

η οποία, όπως αποδεικνύεται, δεν είναι συνεχής στο 1. Εποπτικά τα παραπάνω φαίνονται στο σχήμα που ακολουθεί:



Άσκηση 5: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}+2x-3$. Να αποδείξετε ότι η *f* είναι αντιστρέψιμη και αν είναι γνωστό ότι η f^{-1} είναι συνεχής να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf^{-1}(x)-2x}{xf^{-1}(x)-5\eta\mu x}.$$

<u>Λύση</u>

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι αντιστρέψιμη. Όμως, δεν μπορεί να βρεθεί τύπος για την αντίστροφή της. Η f^{-1} σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα είναι συνεχής στο 0, το οποίο και δίνεται, αφού δεν μπορούμε να το συμπεράνουμε. Παρατηρούμε ότι η εφαρμογή των ιδιοτήτων των ορίων στο παραπάνω όριο οδηγεί σε απροσδιόριστη μορφή. Για τον υπολογισμό του ορίου αυτού δεν είναι αναγκαία η αλλαγή μεταβλητής, διότι μπορεί να υπολογιστεί και διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με x ως εξής:

$$\lim_{x\to 0}\frac{xf^{-1}(x)-2x}{xf^{-1}(x)-5\eta\mu x}=\lim_{x\to 0}\frac{f^{-1}(x)-2}{f^{-1}(x)-5\dfrac{\eta\mu x}{x}}=\frac{1-2}{1-5}=\frac{1}{4}\ ,$$

αφού $\lim\limits_{x\to 0} f^{-1}(x)=f^{-1}(0)=1$ λόγω της συνέχειας της f^{-1} στο 0.

Θα δούμε στη συνέχεια δύο όρια παραστάσεων που περιέχουν μία αντίστροφη συνάρτηση με το x να τείνει στο άπειρο, όπου στην περίπτωση αυτή εκτός από την συνέχεια απαιτείται και η μονοτονία της αντίστροφης συνάρτησης.

<u>Άσκηση 6</u>: Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to I\!R$ με τύπο $f(x)=e^x-\dfrac{1}{x}+2$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και στη συνέχεια να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f^{-1}(x)-2}{3f^{-1}(x)-x}\qquad \textbf{και}\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)-2}{3f^{-1}(x)-x}.$$

<u>Λύση</u>

Παρατηρούμε ότι η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, οπότε το σύνολο τιμών της είναι στο σύνολο $f\big((0,\ +\infty)\big)=(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\,,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x))=(-\infty,\ +\infty)$.

Επειδή η f είναι 1-1 ως γνησίως αύξουσα, είναι αντιστρέψιμη. Δεν μπορεί όμως να βρεθεί τύπος για την f^{-1}.

Το σύνολο τιμών της f^{-1} είναι το σύνολο $f^{-1}\big((-\infty,\ +\infty)\big)=(0,\ +\infty)$.

Είναι προφανές ότι ισχύει $\lim\limits_{x\to-\infty} f^{-1}(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=+\infty$ (εικασία).

Πώς θα το αποδείξουμε όμως αυτό; Δεν θα πρέπει να γνωρίζουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα; Επειδή πράγματι η f^{-1} είναι συνεχής σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, πρέπει να δοθεί.

Σχετικά με την μονοτονία της f^{-1} ισχύει το θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ 2:

Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε και η αντίστροφή της f^{-1} είναι γνησίως μονότονη και έχει το ίδιο είδος μονοτονίας με την f.

Όμως, ούτε και αυτό το θεώρημα αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο.

Όταν μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε η μονοτονία της αντίστροφής της αποδεικνύεται εύκολα με απαγωγή σε άτοπο και αυτό πρέπει να κάνουμε κάθε φορά που την χρειαζόμαστε και δεν μας δίνεται.

Σχετικά τώρα με τον υπολογισμό των ορίων που ζητούνται στην παραπάνω άσκηση, για μεν το πρώτο δεν απαιτείται αλλαγή μεταβλητής, ενώ για το δεύτερο απαιτείται. Έτσι λοιπόν έχουμε:

Α. (Υπολογισμός του πρώτου ορίου)

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f^{-1}(x)-2}{3f^{-1}(x)-x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{3f^{-1}(x)-x}\cdot(f^{-1}(x)-2)\right)=0\cdot(-2)=0,$$

διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3f^{-1}(x)-x\right)=+\infty$.

Β. (Υπολογισμός του δεύτερου ορίου)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)-2}{3f^{-1}(x)-x}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u-2}{3u-e^u+\frac{1}{u}-2}=\lim_{u\to+\infty}\frac{u\left(1-\frac{2}{u}\right)}{u\left(3-\frac{e^u}{u}+\frac{1}{u^2}-\frac{2}{u}\right)}=0,$$

αφού $\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{e^u}{u}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{e^u}{1}=+\infty$.

Τέλος, θα δούμε μία περίπτωση στην οποία δεν απαιτείται να είναι η αντίστροφη συνάρτηση συνεχής στο $x_o\in IR$, αλλά φραγμένη κοντά στο x_o, όπου x_o το σημείο στο οποίο τείνει η μεταβλητή x.

<u>Άσκηση 7</u>: Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases}3e^{x-1}-\sqrt{1-x}, & x\le 1\\ 5^{\ln(x-2)}-\dfrac{2}{x}+4, & x>2\end{cases}$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
β. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
γ. Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.
δ. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to3}\frac{f^{-1}(x)(x^2-4x+3)}{\ln|x^2-9|}.$$

<u>Λύση</u>

α. Εύκολα αποδεικνύεται με την βοήθεια της παραγώγου ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $(2, +\infty)$.

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι ισχύει:

$$f(1) = 3 \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 3, \quad \text{δηλαδή} \quad f(1) = \lim_{x\to 2^+} f(x).$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

β. Η συνάρτηση f είναι 1-1 ως γνησίως αύξουσα, οπότε αντιστρέφεται. Δεν μπορεί όμως να βρεθεί τύπος για την αντίστροφη συνάρτηση της f.

γ. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, σύμφωνα με το θεώρημα 2 και η f^{-1} θα είναι γνησίως αύξουσα. Επειδή όμως το θεώρημα αυτό δεν αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο πρέπει να το αποδείξουμε. Η απόδειξη, όπως αναφέρθηκε, γίνεται εύκολα με απαγωγή σε άτοπο.

δ. Παρατηρούμε ότι η f^{-1} είναι φραγμένη κοντά στο 3, αφού είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της που είναι όλο το *IR*. Έτσι λοιπόν ακολουθώντας την γνωστή διαδικασία με την φραγμένη συνάρτηση βρίσκουμε ότι:

$$\lim_{x\to 3} \frac{f^{-1}(x)(x^2 - 4x + 3)}{\ln |x^2 - 9|} = 0.$$

<u>**Σημείωση**</u>: Είναι φανερό ότι η f^{-1} δεν είναι συνεχής στο 3, αφού δεν υπάρχει το $\lim_{x\to 3} f^{-1}(x)$ (αποδεικνύεται με την βοήθεια των παραπάνω θεωρημάτων 1 και 2). Επειδή όμως για τον υπολογισμό του ζητούμενου ορίου δεν απαιτείται να είναι η f^{-1} συνεχής στο 3, δεν έγινε σχετική αναφορά. Αν όμως επιχειρήσει κάποιος να υπολογίσει το παραπάνω όριο ακολουθώντας τις ιδιότητες των ορίων, τότε θα προσκρούσει σ' αυτό το εμπόδιο.

B_3: Παράγωγος αντίστροφης συνάρτησης

Έχει ενδιαφέρον να δούμε στην περίπτωση που δεν μπορεί να βρεθεί τύπος για την αντίστροφη συνάρτηση μιας αντιστρέψιμης και παραγωγίσιμης συνάρτησης πώς μπορούμε να εξετάσουμε αν η αντίστροφη συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της ή εάν είναι παραγωγίσιμη, πώς μπορούμε να βρούμε την παράγωγό της στο σημείο αυτό. Σχετικές είναι οι δύο επόμενες ασκήσεις.

<u>**Άσκηση 8**</u>**: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \ln x + 4$. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο 5, να βρείτε την παράγωγο της f^{-1} στο 5.**

<u>**Λύση**</u>

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη. Δεν μπορούμε όμως να βρούμε τύπο για την αντίστροφή της.

Όπως γνωρίζουμε, ο τύπος της παραγώγου της σύνθετης συνάρτησης ή κανόνας της αλυσίδας έχει σημειακό χαρακτήρα, οπότε από την σχέση:

$$f^{-1}(f(x))=x,\ \ x\in D_f \qquad (1)$$

αφού $f(1)=5$, $f'(1)=3$ και η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο 5 παίρνουμε:

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(1)\right)\cdot f'(1)=1$$

$$\text{ή}\quad \left(f^{-1}\right)'(5)\cdot 3=1$$

$$\text{ή}\quad \left(f^{-1}\right)'(5)=\frac{1}{3}.$$

Αν δεν δοθεί ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο 5, τότε πρέπει να εργαστούμε με τον ορισμό. Στην περίπτωση όμως αυτή πρέπει να δοθεί ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο 5. Έτσι θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 5}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(5)}{x-5}=\lim_{u\to 1}\frac{u-1}{f(u)-5}=\lim_{u\to 1}\frac{u-1}{u^2+\ln u-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{u\to 1}\frac{1}{2u+\frac{1}{u}}=\frac{1}{3}.$$

Αν μας ζητείται να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει η παράγωγος της f^{-1} σε ένα σημείο y_0 στο οποίο είναι συνεχής, όπου $y_o=f(x_o)$ για κάποιο $x_o\in D_f$, τότε πρέπει να εργαστούμε με τον ορισμό. Αν όμως είναι $f'(x_o)=0$, τότε μπορούμε να εργαστούμε και με απαγωγή σε άτοπο με την βοήθεια του τύπου (1). Χαρακτηριστική είναι η επόμενη άσκηση.

<u>Άσκηση 9</u>: Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,+\infty)\to IR$ με τύπο $f(x)=x^2-2\ln x+9$. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο 10.

<u>Λύση</u>

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι αντιστρέψιμη, αλλά δεν μπορούμε να βρούμε τύπο για την αντίστροφή της. Ακόμη, παρατηρούμε ότι $f(1)=10$ (οπότε $f^{-1}(10)=1$) και ότι $f'(1)=0$.

Αν είχε δοθεί ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο 10, τότε θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο 10 με την βοήθεια του ορισμού ως εξής:

$$\lim_{x\to 10}\frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(10)}{x-10}=\lim_{u\to 1}\frac{u-1}{f(u)-10}=\lim_{u\to 1}\frac{u-1}{u^2-2\ln u-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{u\to 1}\frac{1}{2u-\frac{2}{u}}=$$

$$=\lim_{u\to 1}\frac{u}{2u^2-2}=\lim_{u\to 1}\frac{u}{2(u-1)(u+1)}=\lim_{u\to 1}\left(\frac{1}{u-1}\cdot\frac{u}{2(u+1)}\right)=+\infty$$

Επειδή το παραπάνω όριο δεν είναι πραγματικός αριθμός, συμπεραίνουμε ότι η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο 10 .

Ακόμη πρέπει να σημειωθεί ότι, επειδή τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι τα $[1, +\infty)$ και $[10, +\infty)$ αντίστοιχα, τα παραπάνω όρια είναι πλευρικά (δεξιά).

Όμως, όπως αναφέρθηκε, αφού είναι $f'(1)=0$, μπορούμε να εργαστούμε και με απαγωγή σε άτοπο, όπου δεν χρειάζεται να δοθεί ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο 10. Έτσι λοιπόν έχουμε:

Έστω ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο 10. Αφού $f(1) = 10$, από την (1) παίρνουμε: $\left(f^{-1}\right)'\left(f(1)\right)\cdot f'(1)=1$ ή $\left(f^{-1}\right)'(10)\cdot 0=1$ (άτοπο).

Άρα η f^{-1} δεν είναι παραγωγίσιμη στο 10.

B$_4$: Ολοκλήρωμα αντίστροφης συνάρτησης

Όταν μας ζητείται να υπολογίσουμε το ορισμένο ολοκλήρωμα της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f για ένα διάστημα [α, β], τότε μπορούμε να κάνουμε αλλαγή μεταβλητής θέτοντας $u=f^{-1}(x)$ που συμφωνεί με το πνεύμα του αντίστοιχου θεωρήματος του σχολικού βιβλίου, όπου η νέα μεταβλητή εκφράζεται ως συνάρτηση της υπάρχουσας. Όμως, επειδή είναι δύσκολο να βρούμε το διαφορικό du από την παραπάνω ισότητα, παίρνουμε την ισοδύναμή της $x=f(u)$, οπότε έχουμε $dx=f'(u)du$. Στη συνέχεια, αφού προσδιορίσουμε και τα όρια για την μεταβλητή u του νέου ορισμένου ολοκληρώματος, υπολογίζουμε το ζητούμενο ολοκλήρωμα.

Όμως, για τυπικούς λόγους[5] και εδώ θα πρέπει να δίνεται ότι η f^{-1} είναι συνεχής στο [α, β] για να ξέρουμε ότι είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο διάστημα αυτό.

Ως παράδειγμα ολοκλήρωσης της αντίστροφης συνάρτησης θα δούμε την άσκηση του 3^{ου} θέματος των πανελλαδικών εξετάσεων του 2003, το οποίο είναι:

«ΘΕΜΑ 3^{ο}

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

β. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ *για κάθε* $x \in IR$.

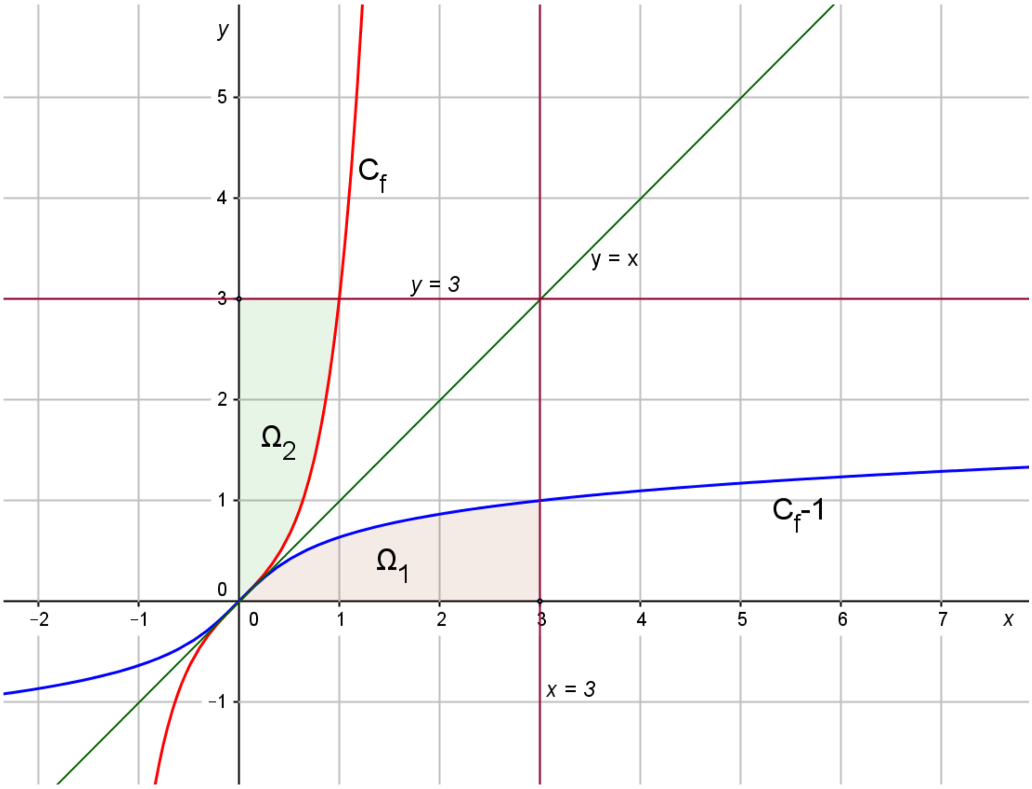
γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο (0,0) είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1}.

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1}, *τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση* $x = 3$».

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη, αλλά και εδώ δεν μπορούμε να βρούμε τύπο για την αντίστροφή της.

[5] Στο αντίστοιχο σχολικό βιβλίο η συνέχεια μιας συνάρτησης f στο [α, β] δίνεται ως ικανή συνθήκη (όχι και αναγκαία) για να είναι η f ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο [α, β].

Θα επικεντρωθούμε στο ερώτημα *δ* στο οποίο ζητείται ο υπολογισμός του εμβαδού του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f^{-1}, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία με εξίσωση $x = 3$. Στο παρακάτω σχήμα στο οποίο φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων f και f^{-1} είναι το χωρίο Ω_1.



Επειδή $f(0) = 0$, $f(1) = 3$ και η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο [0, 1], είναι $f([0, 1]) = [0, 3]$, οπότε $f^{-1}([0,\ 3]) = [0,\ 1]$. Συνεπώς ισχύει $f^{-1}(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [0, 3]$, οπότε έχουμε:

$$E(\Omega_1) = \int_0^3 f^{-1}(x)dx\,.$$

Τυπικά δεν γνωρίζουμε ότι η f^{-1} είναι ολοκληρώσιμη στο [0, 3], διότι δεν δίνεται στην εκφώνηση της άσκησης ότι είναι συνεχής, εκτός και αν συμπεράνουμε διαισθητικά την συνέχεια της f^{-1} στο διάστημα [0, 3] από την γραφική της παράσταση, την οποία καλό είναι να χαράξουμε.

Για να υπολογίσουμε το παραπάνω ορισμένο ολοκλήρωμα θέτουμε $u = f^{-1}(x)$, οπότε έχουμε $x = f(u) = u^5 + u^3 + u$ και $dx = f'(u)du = (5u^4 + 3u^2 + 1)du$. Ακόμη, για $x = 0$ είναι $u = 0$ και για $x = 3$ είναι $u = 1$. Έτσι λοιπόν το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E(\Omega_1) = \int_0^3 f^{-1}(x)dx = \int_0^1 uf'(u)du = \int_0^1 (5u^5 + 3u^3 + u)du = \frac{25}{12} \text{ τ.μ.}$$

ή

$$E(\Omega_1) = \int_0^3 f^{-1}(x)dx = \int_0^1 uf'(u)du = \left[uf(u)\right]_0^1 - \int_0^1 f(u)du = \frac{25}{12} \text{ τ.μ.}$$

<u>Σημείωση:</u> Με τον μετασχηματισμό που γίνεται, η παράσταση που προκύπτει μέσα στο ολοκλήρωμα είναι ολοκληρώσιμη ως συνεχής και έτσι υπολογίζεται το $\int_0^3 f^{-1}(x)dx$. Αν κάποιος μαθητής αιτιολογήσει την ύπαρξη του ολοκληρώματος αυτού με αυτόν τον τρόπο παρακάμπτοντας έτσι την συνέχεια της f^{-1}, που δεν δίνεται, θεωρώ ότι πρέπει να γίνει αποδεκτό.

Αν, τώρα, κάποιος μαθητής για την εύρεση του εμβαδού του χωρίου Ω_1 δεν μπορεί να υπολογίσει το ολοκλήρωμα $\int_0^3 f^{-1}(x)dx$ όπως παραπάνω, εναλλακτικά μπορεί να υπολογίσει τον εμβαδόν του χωρίου Ω_2 που είναι ίσο με το χωρίο Ω_1 λόγω συμμετρίας. Με αυτόν τον τρόπο θα υπολογίσει το ολοκλήρωμα της συνάρτησης *f*, η οποία ξέρουμε ότι είναι ολοκληρώσιμη, αφού είναι συνεχής. Δηλαδή στην περίπτωση αυτή έχουμε:

$$E(\Omega_1) = E(\Omega_2) = \int_0^1 \left(3 - f(x)\right)dx = \int_0^1 \left(3 - x^5 - x^3 - x\right)dx = \frac{25}{12} \quad \text{τ.μ.}$$

Επίλογος

Κλείνοντας, πιστεύω πως έγινε κατανοητό το πνεύμα της εργασίας, δηλαδή ότι οι ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά της αντίστροφης συνάρτησης μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης μπορούν να μελετηθούν ανεξάρτητα από το αν μπορεί ή όχι να βρεθεί τύπος για τον ορισμό της.