Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ   Π Ι Θ Α Ν Ο Τ Η Τ Ω Ν

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

Πρόλογος

Η **Θεωρία Πιθανοτήτων** είναι ένας σχετικά νέος κλάδος των Μαθηματικών με πολλά ιδιαίτερα χαρακτηριστικά στοιχεία. Επειδή η ιδιαιτερότητα αυτή, όπως είναι φυσικό, εμφανίζεται και στις ασκήσεις, κρίθηκε σκόπιμο να γραφτεί η παρούσα εργασία, η οποία έχει ως σκοπό να βοηθήσει τους μαθητές της Γ΄ Λυκείου να εμπεδώσουν έννοιες και διαδικασίες του κλάδου αυτού των Μαθηματικών.

Εισαγωγή

Η πιθανότητα (probability) είναι μία συνάρτηση P σύμφωνα με την οποία υποσύνολα (**ενδεχόμενα**) του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης αντιστοιχίζονται σε πραγματικούς αριθμούς του διαστήματος [0, 1]. Ο μαθηματικός ορισμός της έννοιας της πιθανότητας που είναι δεκτός σήμερα είναι ο **αξιωματικός ορισμός,** ο οποίος διατυπώθηκε από τον Kolmogorov το 1933 με πρότυπο την *Θεωρία Μέτρου*. Ο αξιωματικός ορισμός του σχολικού βιβλίου αποτελεί μία περίπτωση του γενικού ορισμού. Μία ειδική περίπτωση του αξιωματικού ορισμού της πιθανότητας του σχολικού βιβλίου (ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα) είναι ο κλασσικός ορισμός της πιθανότητας, ο οποίος διατυπώθηκε από τον Laplace το 1812.

Σε ένα πείραμα τύχης, ενώ δεν ισχύει ο **αιτιοκρατικός νόμος**, δηλαδή δεν μπορούμε να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα, ισχύει ωστόσο ο νόμος της **στατιστικής τάξης** ή **στατιστικής ομαλότητας,** που σημαίνει ότι αν εκτελεσθεί το πείραμα τύχης πολλές φορές κάτω από τις ίδιες συνθήκες, τότε η σχετική συχνότητα πραγματοποίησης ενός ενδεχομένου A τείνει να σταθεροποιηθεί σε έναν αριθμό, έστω $P(A)$, ο οποίος εκφράζει την πιθανότητα πραγματοποίησης του A.

Οι ασκήσεις που λύνονται στην εργασία αυτή, για καλύτερη εμπέδωση των διαδικασιών, ταξινομούνται σε τρεις κατηγορίες, οι οποίες είναι:

1) Ασκήσεις στις οποίες ζητείται ο **υπολογισμός της πιθανότητας** ενός ενδεχομένου,
2) Ασκήσεις στις οποίες ζητείται η **απόδειξη ανισοτήτων** που περιέχουν πιθανότητες ενδεχομένων και
3) Γενικές **θεωρητικές** ασκήσεις.

Α. Υπολογισμός της πιθανότητας ενός ενδεχομένου

Σε πολλές ασκήσεις Πιθανοτήτων ζητείται η πιθανότητα ενός ενδεχομένου. Το ενδεχόμενο αυτό συνήθως διατυπώνεται με λόγια και μπορεί να παράγεται από τον δειγματικό χώρο πρωτογενώς ή από άλλα ενδεχόμενα των οποίων γνωρίζουμε τις πιθανότητες. Στην πρώτη περίπτωση ο υπολογισμός της πιθανότητας του ενδεχομένου γίνεται άμεσα με τη βοήθεια των ορισμών, ενώ στη δεύτερη έμμεσα με τη βοήθεια των κανόνων.

Ι. Άμεσος υπολογισμός της πιθανότητας

Στην περίπτωση αυτή πρέπει πρώτα από όλα να κατανοήσουμε το πείραμα τύχης και να βρούμε έναν δειγματικό χώρο που το περιγράφει λαμβάνοντας υπόψη και το ενδεχόμενο του οποίου ζητάμε την πιθανότητα. Κατόπιν βρίσκουμε το ενδεχόμενο αυτό με αναγραφή των στοιχείων του (ευνοϊκές περιπτώσεις) και τέλος υπολογίζουμε την πιθανότητά του, είτε με τον κλασικό ορισμό, αν τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, είτε με τον αξιωματικό, αν τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα. Παραστατικά η όλη διαδικασία αποδίδεται με το παρακάτω σχήμα:

Πείραμα τύχης - Δειγματικός χώρος	→	Εύρεση του ενδεχομένου με αναγραφή	→	Υπολογισμός της πιθανότητας

Τα παραπάνω θα γίνουν περισσότερο κατανοητά με τη βοήθεια των ασκήσεων που ακολουθούν.

1. Επιλέγουμε τυχαία έναν φυσικό αριθμό. Να βρείτε:
(i) την πιθανότητα ο αριθμός αυτός να διαιρείται με το 3,
(ii) την πιθανότητα να διαιρείται με το 7 και
(iii) την πιθανότητα να διαιρείται συγχρόνως με το 3 και το 7.

<u>Λύση</u>

(i) Έστω A το ενδεχόμενο: «*Ο φυσικός αριθμός που επιλέγεται διαιρείται με το 3*». Ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης θεωρητικά είναι όλο το $I\!N$, οπότε το A θα είναι το σύνολο των πολλαπλασίων του 3. Παρατηρούμε όμως ότι και τα δύο αυτά σύνολα έχουν άπειρο πλήθος στοιχείων και αυτό δημιουργεί πρόβλημα στον υπολογισμό της πιθανότητας του A. Γι' αυτό λοιπόν, επειδή μας ενδιαφέρει εάν ο αριθμός που επιλέγεται διαιρείται με το 3 και όχι ο αριθμός καθαυτός, ως αποτέλεσμα του πειράματος τύχης μπορούμε να θεωρούμε το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού που επιλέγεται με το 3. Σ' αυτήν την περίπτωση ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης θα είναι το σύνολο $\Omega = \{0, 1, 2\}$ και το ενδεχόμενο A το σύνολο $A = \{0\}$. Επειδή η επιλογή του φυσικού αριθμού γίνεται με τυχαίο τρόπο, τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, οπότε έχουμε:

$$P(A) = \frac{1}{3}.$$

(ii) Σκεπτόμενοι όπως στο ερώτημα (i) ως δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης στην περίπτωση αυτή θεωρούμε το σύνολο $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και αν B είναι το ενδεχόμενο: «*Ο φυσικός αριθμός που επιλέγεται διαιρείται με το 7*», τότε είναι $B = \{0\}$, οπότε:

$$P(B) = \frac{1}{7}.$$

(iii) Τώρα ζητάμε την πιθανότητα του ενδεχομένου: «*A και B*» ($A \cap B$). Δεν μπορούμε όμως να υπολογίσουμε την πιθανότητα του ενεχομένου αυτού με τη βοήθεια των προηγούμενων δειγματικών χώρων, επειδή, όπως παρατηρούμε, τα A και B δεν είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου. Πρέπει επομένως να βρούμε ένα νέο δειγματικό χώρο, όπου τα ενδεχόμενα A και B θα είναι υποσύνολά του. Προς τούτο, μπορούμε να θεωρούμε ως αποτέλεσμα του πειράματος τύχης το διατεταγμένο ζεύγος, το οποίο θα έχει ως πρώτο μέλος το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού που επιλέγεται με το 3 και ως δεύτερο το υπόλοιπο της διαίρεσης του ίδιου αριθμού με το 7. Στον παρακάτω πίνακα διπλής εισόδου φαίνονται όλα τα διατεταγμένα ζεύγη που μπορεί να προκύψουν με αυτόν τον τρόπο, το σύνολο των οποίων αποτελεί τον νέο δειγματικό χώρο Ω.

Δυνατά υπόλοιπα της διαίρεσης

με το 3 \ με το 7	0	1	2	3	4	5	6
0	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(0, 4)	(0, 5)	(0, 6)
1	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)

Παρατηρούμε ότι $N(\Omega) = 21$ και ότι τα ενδεχόμενα A και B ως υποσύνολα του νέου δειγματικού χώρου είναι:

$A = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (0, 4), (0, 5), (0, 6)\}$ και $B = \{(0, 0), (1, 0), (2, 0)\}$

με $N(A) = 7$ και $N(B) = 3$ και ακόμη πως:

$P(A) = \frac{7}{21} = \frac{1}{3}$ [δείτε ερώτημα (i)] και $P(B) = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$ [δείτε ερώτημα (ii)].

Τέλος, παρατηρούμε ότι $A \cap B = \{(0, 0)\}$, οπότε:

$$P(A \cap B) = \frac{1}{21}.$$

2. Για ένα ευρωπαϊκό κύπελλο έχουν προκριθεί στις 8 ομάδες δύο ελληνικές. Σύμφωνα με την κλήρωση οι ομάδες αυτές, για την πρόκριση στην επόμενη φάση της διοργάνωσης θα παίξουν με δύο ξένες ομάδες (αγώνες «νοκ-άουτ»). Αν όλες οι ομάδες έχουν την ίδια πιθανότητα πρόκρισης, να βρείτε την πιθανότητα μία τουλάχιστον ελληνική ομάδα να προκριθεί στην επόμενη φάση της διοργάνωσης.

Λύση

Έστω ε_1 και ε_2 οι δύο ελληνικές ομάδες και ξ_1, ξ_2 οι δύο ξένες ομάδες που θα παίξουν αντίστοιχα με τις δύο ελληνικές. Το πείραμα τύχης εδώ είναι οι δύο αγώνες που θα γίνουν μεταξύ των ομάδων. Να σημειωθεί ότι κάθε αγώνας έχει το χαρακτηριστικό ενός πειράματος τύχης που είναι η αδυναμία μας να προβλέψουμε με βεβαιότητα το αποτέλεσμα. Έστω λοιπόν A το ενδεχόμενο: «*Μία τουλάχιστον ελληνική ομάδα προκρίνεται στην επόμενη φάση*». Το αποτέλεσμα από τους δύο αγώνες που θα γίνουν είναι η πρόκριση δύο ομάδων στην επόμενη φάση, οπότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης, ο οποίος περιέχει όλα τα δυνατά αποτελέσματα, είναι:

$$\Omega = \{\varepsilon_1\xi_2, \varepsilon_1\varepsilon_2, \varepsilon_2\xi_1, \xi_1\xi_2\}.$$

Αφού όλες οι ομάδες έχουν την ίδια πιθανότητα πρόκρισης, τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα με πιθανότητα 1/4.

Το ενδεχόμενο A με αναγραφή των στοιχείων του είναι το σύνολο $A = \{\varepsilon_1\xi_2, \varepsilon_1\varepsilon_2, \varepsilon_2\xi_1\}$.

Άρα η πιθανότητα του ενδεχομένου A είναι $P(A) = \frac{3}{4}$.

<u>**Σημείωση**</u>: Αν στην παραπάνω άσκηση θεωρήσει κάποιος ως αποτέλεσμα του πειράματος τύχης τον αριθμό των ελληνικών ομάδων που υπάρχει περίπτωση να προκριθούν στην επόμενη φάση, δηλαδή καμία (0ε), μία (1ε) ή δύο (2ε), τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης θα είναι το σύνολο $\Omega = \{0\varepsilon, 1\varepsilon, 2\varepsilon\}$. Αυτός ο δειγματικός χώρος όμως θέλει προσοχή, γιατί τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα, αφού το αποτέλεσμα 1ε προκύπτει με δύο τρόπους. Γι' αυτό, θεωρώ πως είναι καλύτερο να χρησιμοποιείται ο πρώτος δειγματικός χώρος, ο οποίος είναι πιο αναλυτικός και τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα.

3. Δίνεται η τυχαία εξίσωση $x^2 + \kappa x + \lambda = 0$, όπου οι αριθμοί κ και λ ορίζονται αντίστοιχα με τη βοήθεια δύο διαδοχικών ρίψεων ενός «αμερόληπτου» ζαριού.
Να βρείτε την πιθανότητα η εξίσωση αυτή να έχει ρητές ρίζες.

<u>**Λύση**</u>

Τη δοθείσα εξίσωση την χαρακτηρίζουμε ως τυχαία, επειδή οι αριθμοί $\boldsymbol{\kappa}$ και $\boldsymbol{\lambda}$ ορίζονται με τυχαίο τρόπο. Έστω A το ενδεχόμενο: «*Η εξίσωση* $x^2 + \kappa x + \lambda = 0$ *έχει ρητές ρίζες*». Εδώ το πείραμα τύχης είναι οι δύο διαδοχικές ρίψεις του ζαριού όπου το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης ορίζει την τιμή της παραμέτρου κ και της δεύτερης την τιμή της παραμέτρου λ. Συνεπώς ο δειγματικός χώρος Ω είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών όλων των δυνατών αποτελεσμάτων των δύο διαδοχικών ρίψεων του ζαριού. Είναι $N(\Omega) = 36$ (δείτε σχολικό βιβλίο, σελίδα 152, εφαρμογή 1).

Για να έχει η παραπάνω εξίσωση ρητές ρίζες (μία διπλή ή δύο διαφορετικές) πρέπει η διακρίνουσά της, $\Delta = \kappa^2 - 4\lambda$, να είναι ίση με το τετράγωνο ενός ακέραιου αριθμού. Στην περίπτωση αυτή προφανώς θα ισχύει η σχέση $0 \le \Delta \le 25$. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται όλα τα ζεύγη τιμών που ικανοποιούν αυτές τις συνθήκες.

Δ	0	1	4	9	16	25
(κ, λ)	(2, 1) (4, 4)	(3, 2) (5, 6)	(4, 3)	(5, 4)	(6, 5)	-

Παρατηρούμε ότι το ενδεχόμενο A με αναγραφή των στοιχείων του είναι το σύνολο:

$$A = \{(2, 1), (4, 4), (3, 2), (5, 6), (4, 3), (5, 4), (6, 5)\}$$

με $N(A) = 7$, οπότε:

$$P(A) = \frac{7}{36},$$

αφού τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα, επειδή το ζάρι είναι «αμερόληπτο».

ΙΙ. Έμμεσος υπολογισμός της πιθανότητας

Εδώ πρέπει πρώτα να διατυπώνουμε το ενδεχόμενο με μαθηματικό τρόπο (αν δεν είναι διατυπωμένο έτσι) και κατόπιν να υπολογίζουμε την πιθανότητά του με τους κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων, δηλαδή να ακολουθούμε το παρακάτω διάγραμμα:

Λεκτική διατύπωση του ενδεχομένου → Μαθηματική διατύπωση του ενδεχομένου → Υπολογισμός της πιθανότητας

Για την μαθηματική διατύπωση ενός ενδεχομένου εξυπηρετεί πολύ να είναι αυτό διατυπωμένο με τη βοήθεια λογικών πράξεων και συγκεκριμένα με τη βοήθεια της **άρνησης**, της **σύζευξης** και της **διάζευξης**. Η άρνηση (**όχι, δεν**) αντιστοιχεί στο συμπλήρωμα (΄) ενός συνόλου, η σύζευξη (**και**) αντιστοιχεί στην τομή ($\cap$) συνόλων και η διάζευξη (**ή**) αντιστοιχεί στην ένωση ($\cup$) συνόλων. Γι' αυτό ίσως χρειαστεί σε κάποιες περιπτώσεις να γίνει και αναδιατύπωση του ενδεχομένου. Στην ηλεκτρονική διεύθυνση:

http://www.p-theodoropoulos.gr/ergasies/didakt-praend.pdf

μπορείτε να δείτε, αν θέλετε, έναν σχετικό πίνακα που έχω κατασκευάσει.
Τα παραπάνω θα γίνουν περισσότερο κατανοητά με τη βοήθεια των ασκήσεων που ακολουθούν.

4. Το 60% των μαθητών μιας πόλης έχουν κινητό τηλέφωνο. Το 40% έχουν ηλεκτρονικό υπολογιστή (Η.Υ.) και το 25% έχουν και τα δύο. Αν επιλέξουμε τυχαία έναν μαθητή της πόλης αυτής, να βρείτε τις πιθανότητες ο μαθητής αυτός:
(i) να έχει ένα μόνο από τα δύο,
(ii) να μην έχει κανένα από τα δύο και
(iii) να έχει το πολύ ένα από τα δύο.

Λύση

Έστω A το ενδεχόμενο: «*Ο μαθητής έχει κινητό τηλέφωνο*» και B το ενδεχόμενο: «*Ο μαθητής έχει Η.Υ.*».
Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος οι πιθανότητες των ενδεχομένων A, B και $A\cap B$ είναι:

$$P(A) = 0{,}6 \quad , \quad P(B) = 0{,}4 \quad \text{και} \quad P(A\cap B) = 0{,}25.$$

Συνεχίζοντας έχουμε:

(i) Έστω Γ το ενδεχόμενο: «*Ο μαθητής έχει ένα μόνο από τα δύο*». Το ενδεχόμενο Γ αναλυτικά διατυπώνεται ως εξής: «*Ο μαθητής, έχει κινητό τηλέφωνο και δεν έχει Η.Υ. ή, έχει Η.Υ. και δεν έχει κινητό τηλέφωνο*».
Παρατηρούμε ότι το ενδεχόμενο Γ παράγεται από τα ενδεχόμενα A και B με τη βοήθεια των οποίων μπορεί να διατυπωθεί πιο σύντομα ως εξής: «*Α και όχι Β ή, Β και όχι Α*». Η τελευταία διατύπωση μας οδηγεί στην μαθηματική έκφραση του ενδεχομένου Γ που είναι:

$$\Gamma = (A\cap B')\cup(B\cap A') = (A\text{-}B)\cup(B\text{-}A).$$

Επειδή τα ενδεχόμενα A-B και B-A είναι *ασυμβίβαστα*, σύμφωνα με τον *απλό προσθετικό νόμο* έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} P(\Gamma) = P[(A\text{-}B)\cup(B\text{-}A)] &= P(A\text{-}B) + P(B\text{-}A) \\ &= P(A) + P(B) - 2P(A\cap B) \\ &= 0{,}6 + 0{,}4 - 2\cdot 0{,}25 \\ &= 0{,}5 \end{aligned}$$

(ii) Έστω Δ το ενδεχόμενο: «*Ο μαθητής δεν έχει κανένα από τα δύο*», το οποίο πιο συγκεκριμένα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής: «*Ο μαθητής δεν έχει ούτε κινητό τηλέφωνο ούτε Η.Υ.*», ή χρησιμοποιώντας τα ενδεχόμενα A και B ως εξής: «*όχι Α και όχι Β*». Η τελευταία διατύπωση οδηγεί στην μαθηματική έκφραση του Δ που είναι $\Delta = A'\cap B'$.

Επειδή δεν είναι προφανής ο υπολογισμός της πιθανότητας του ενδεχομένου $A'\cap B'$ σκεπτόμαστε ως εξής:
Όταν πραγματοποιείται το ενδεχόμενο: «*Ο μαθητής δεν έχει κανένα από τα δύο*» (μαθηματική έκφραση: $A'\cap B'$), τότε **δεν** πραγματοποιείται το ενδεχόμενο: «*Ο μαθητης έχει ένα τουλάχιστον από τα δύο*» ($A\cup B$). Αυτό σημαίνει ότι το ενδεχόμενο $A'\cap B'$ είναι **συμπληρωματικό** (αντίθετο) του ενδεχομένου $A\cup B$, δηλαδή ότι ισχύει:

$$A'\cap B' = (A\cup B)'.$$

Έτσι λοιπόν έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} P(\Delta) = P(A'\cap B') = P[(A\cup B)'] &= 1 - P(A\cup B) \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A\cap B) \\ &= 1 - 0{,}6 - 0{,}4 + 0{,}25 \\ &= 0{,}25 \end{aligned}$$

(iii) Έστω E το ενδεχόμενο: «*Ο μαθητής έχει το πολύ ένα από τα δύο*».
Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα του E με δύο τρόπους. Έχουμε:

<u>1^{ος} τρόπος (με τη βοήθεια των ενδεχομένων Γ και Δ)</u>

Το ενδεχόμενο E μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής: «*Ο μαθητής έχει μόνο ένα από τα δύο ή κανένα*». Παρατηρούμε ότι το E εκφράζεται με τη βοήθεια των ενδεχομένων Γ και Δ που αναφέρονται παραπάνω και πιο συγκεκριμένα ότι ισχύει: $E = \Gamma \cup \Delta$.
Επειδή τα ενδεχόμενα Γ και Δ είναι *ασυμβίβαστα*, σύμφωνα με τον *απλό προσθετικό νόμο* έχουμε:

$$P(E) = P(\Gamma) + P(\Delta) = 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75.$$

<u>2^{ος} τρόπος (ανεξάρτητα από τα ενδεχόμενα Γ και Δ)</u>

Μία άλλη διατύπωση του ενδεχομένου E είναι: «*Ο μαθητής **δεν** έχει και τα δύο, δηλ. δεν έχει και κινητό τηλέφωνο και Η.Υ.*».
Είναι προφανές ότι το ενδεχόμενο E είναι συμπληρωματικό του ενδεχομένου: «*Ο μαθητής έχει και τα δύο, δηλ. έχει και κινητό τηλέφωνο και Η.Υ.*» ($A\cap B$).
Αφού λοιπόν είναι $E = (A\cap B)'$, έχουμε:

$$\begin{aligned} P(E) = P[(A\cap B)'] &= 1 - P(A\cap B) \\ &= 1 - 0{,}25 \\ &= 0{,}75 \end{aligned}$$

<u>Σημείωση</u>: Αξίζει να σημειωθεί ότι το ενδεχόμενο: «*Ο μαθητής **δεν** έχει και κινητό τηλέφωνο και Η.Υ*» [$(A\cap B)'$] είναι ισοδύναμο με το ενδεχόμενο: «*Ο μαθητής, **δεν** έχει κινητό τηλέφωνο **ή**, **δεν** έχει Η.Υ.*» ($A'\cup B'$). Παρατηρούμε λοιπόν ότι ισχύει:

$$(A\cap B)' = A'\cup B'.$$

Οι τύποι $(A\cup B)' = A'\cap B'$ και $(A\cap B)' = A'\cup B'$, που είδαμε, είναι γνωστοί ως τύποι του De Morgan.

5. Έστω τα ενδεχόμενα *A* και *B* του ίδιου δειγματικού χώρου με $P(A)=\frac{1}{3}$,

$P(B)=\frac{1}{4}$ και $P(A\cup B)=\frac{5}{12}$.

Να υπολογίσετε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο *A*.

<u>Λύση</u>

Πραγματοποιείται μόνο το ενδεχόμενο *A* σημαίνει: «*A και όχι B*» που με μαθηματικό τρόπο εκφράζεται ως εξής: $A\cap B'$ ή $A-B$.
Επομένως, σύμφωνα με τον αντίστοιχο κανόνα (δείτε σχολικό βιβλίο), έχουμε:

$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B).$$

Παρατηρούμε ότι για τον υπολογισμό της πιθανότητας $P(A\cap B')$ χρειαζόμαστε την πιθανότητα της τομής των ενδεχομένων *A* και *B*, δηλαδή την πιθανότητα $P(A\cap B)$, την οποία υπολογίζουμε ως εξής:
Ο προσθετικός νόμος $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$ ισοδύναμα γράφεται:

$$P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B).$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα στον τελευταίο τύπο παίρνουμε:

$$P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{5}{12}=\frac{1}{6},$$

οπότε έχουμε:

$$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}.$$

Β΄ Ασκήσεις με ανισότητες

Στην κατηγορία αυτή θα δούμε ασκήσεις που αναφέρονται στην απόδειξη ανισοτικών σχέσεων, οι οποίες περιέχουν πιθανότητες ενδεχομένων και αποδεικνύονται με καθαρά πιθανοθεωρητικό τρόπο, δηλαδή με τη βοήθεια των κανόνων και των σχέσεων της *Θεωρίας Πιθανοτήτων*. Οι σχέσεις αυτές συνήθως περιέχουν ενδεχόμενα που προκύπτουν με τις πράξεις μεταξύ ενδεχομένων. Γι' αυτό θυμίζουμε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$A\cap B\subseteq A\subseteq A\cup B \quad \text{και} \quad A\cap B\subseteq B\subseteq A\cup B.$$

Ας δούμε θεωρητικά δύο χαρακτηριστικές περιπτώσεις.

- Από τις σχέσεις:

$$A\cap B\subseteq A \quad \text{και} \quad A\cap B\subseteq B$$

σύμφωνα με τον $4^{\text{ο}}$ κανόνα (δείτε σχολικό βιβλίο) έχουμε:

$$P(A\cap B)\le P(A) \quad \text{και} \quad P(A\cap B)\le P(B). \qquad (1)$$

Ακόμη, ισχύει η σχέση:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)\le 1$$

από την οποία προκύπτει ότι:

$$P(A) + P(B) - 1\le P(A\cap B). \qquad (2)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) και επειδή $P(A\cap B) \geq 0$ παίρνουμε:

$$\max(0,\ P(A) + P(B) - 1) \leq P(A\cap B) \leq \min(P(A),\ P(B)). \qquad (3)$$

- Από τις σχέσεις:

$$A \subseteq A\cup B \quad \text{και} \quad B \subseteq A\cup B$$

σύμφωνα με τον 4^{ο} κανόνα έχουμε:

$$P(A) \leq P(A\cup B) \quad \text{και} \quad P(B) \leq P(A\cup B)\,. \qquad (4)$$

Ακόμη, από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων προκύπτει ότι:

$$P(A\cup B) \leq P(A) + P(B)\,. \qquad (5)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (4) και (5) και επειδή $P(A\cup B) \leq 1$ παίρνουμε:

$$\max(P(A),\ P(B)) \leq P(A\cup B) \leq \min(1,\ P(A) + P(B)). \qquad (6)$$

Σημείωση: Οι ανισότητες που ζητούνται να αποδειχθούν στις ασκήσεις συνήθως αποτελούν εφαρμογή των παραπάνω διπλών ανισοτήτων (3) και (6). Σε κάθε άσκηση όμως πρέπει να αποδεικνύονται αναλυτικά οι σχέσεις αυτές, αφού δεν αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο. Χαρακτηριστικές είναι οι δύο επόμενες ασκήσεις.

6. Αν *A* και *B* είναι δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου με $P(A)=\frac{2}{5}$ και $P(B)=\frac{5}{8}$, να αποδείξετε ότι $\frac{1}{40} \leq P(A\cap B) \leq \frac{2}{5}$.

Λύση

(Είναι φανερό ότι η άσκηση αυτή αποτελεί εφαρμογή της (3). Όμως, όπως αναφέραμε, πρέπει να γίνει πλήρης απόδειξη, αφού η (3) δεν αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο).

Από τις σχέσεις $A\cap B \subseteq A$ και $A\cap B \subseteq B$, σύμφωνα με τον 4^{ο} κανόνα και τα δεδομένα της άσκησης έχουμε:

$$P(A\cap B) \leq P(A) = \frac{2}{5} \quad \text{και} \quad P(A\cap B) \leq P(B) = \frac{5}{8}$$

και επειδή $\frac{2}{5} \leq \frac{5}{8}$, η αλήθεια της πρώτης ανισότητας συνεπάγεται την αλήθεια και της δεύτερης. Γι' αυτό λοιπόν αρκεί να αναφέρουμε μόνο την πρώτη ανισότητα, δηλαδή ότι ισχύει:

$$P(A\cap B) \leq \frac{2}{5}. \qquad (1)$$

Επίσης, από την σχέση $P(A\cup B) \leq 1$ έχουμε:

$$P(A) + P(B) - P(A\cap B) \leq 1 \ \text{ ή}$$

$$P(A) + P(B) - 1 \leq P(A\cap B).$$

Αντικαθιστώντας τις πιθανότητες των *A* και *B* στην τελευταία σχέση παίρνουμε:

$$\frac{2}{5}+\frac{5}{8}-1 \leq P(A \cap B) \quad \text{ή} \quad P(A \cap B) \geq \frac{1}{40} > 0. \qquad (2)$$

Τέλος, συνδυάζοντας τις ανισότητες (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{1}{40} \leq P(A \cap B) \leq \frac{2}{5}.$$

7. Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου με $P(A)=\frac{1}{3}$ και $P(B)=\frac{3}{8}$, να αποδείξετε ότι $\frac{3}{8} \leq P(A \cup B) \leq \frac{17}{24}$.

<u>Λύση</u>

(Και εδώ είναι φανερό ότι η άσκηση αυτή αποτελεί εφαρμογή της (6). Όμως πρέπει να γίνει πλήρης απόδειξη, αφού η (6) δεν αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο).

Από τις σχέσεις $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$, σύμφωνα με τον $4^{ο}$ κανόνα και τα δεδομένα της άσκησης έχουμε:

$$\frac{1}{3}=P(A) \leq P(A \cup B) \qquad \text{και} \qquad \frac{3}{8}=P(B) \leq P(A \cup B)$$

και επειδή $\frac{1}{3} \leq \frac{3}{8}$, η αλήθεια της δεύτερης ανισότητας συνεπάγεται την αλήθεια και της πρώτης. Γι' αυτό λοιπόν αρκεί να αναφέρουμε μόνο την δεύτερη ανισότητα, δηλαδή ότι ισχύει:

$$P(A \cup B) \geq \frac{3}{8}. \qquad (1)$$

Επίσης, αντικαθιστώντας στη σχέση $P(A \cup B) \leq P(A)+P(B)$ τις πιθανότητες των ενδεχομένων A και B παίρνουμε:

$$P(A \cup B) \leq \frac{1}{3}+\frac{3}{8} \quad \text{ή} \quad P(A \cup B) \leq \frac{17}{24} < 1. \qquad (2)$$

Συνδυάζοντας τέλος τις ανισότητες (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{3}{8} \leq \mathrm{P}(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \leq \frac{17}{24}.$$

Γ΄ Γενικές ασκήσεις

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με γενικές θεωρητικές ασκήσεις, οι οποίες λύνονται με εφαρμογή γνώσεων από τη *Θεωρία Πιθανοτήτων* αλλά και από άλλους κλάδους των Μαθηματικών. Στην περίπτωση όμως αυτή δεν μπορούμε να δώσουμε γενικές οδηγίες πέρα από το ότι πρέπει κανείς να γνωρίζει πολύ καλά τη θεωρία όλων των κλάδων των Μαθηματικών που έχει διδαχθεί και να εξασκείται στη λύση σύνθετων προβλημάτων, τα οποία απαιτούν συνδυασμό γνώσεων από διάφορους κλάδους των Μαθηματικών. Το πνεύμα αυτό φαίνεται καθαρά στις ασκήσεις που ακολουθούν.

8. Έστω A και B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με

$$P(A) + P(B) \neq 2P(A\cap B).$$

Δίνεται ακόμα η συνάρτηση:

$$f(x) = (x - P(A\cup B))^3 - (x - P(A\cap B))^3, \quad x \in IR.$$

α. Να δείξετε ότι $P(A\cap B) \neq P(A\cup B)$.

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο

$$x_o = \frac{P(A)+P(B)}{2}.$$

γ. Εάν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα, να δείξετε ότι

$$f(P(A)) = f(P(B)).$$

(Εξετάσεις 2002)

Λύση

α. Έχουμε:

$$P(A\cup B) \neq P(A\cap B) \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A\cap B) \neq P(A\cap B)$$
$$\Leftrightarrow P(A) + P(B) \neq 2P(A\cap B) \quad \text{που ισχύει (Υπόθεση).}$$

Άρα ισχύει $P(A\cap B) \neq P(A\cup B)$.

β. Η παράγωγος της συνάρτησης f είναι:

$$f'(x) = 3[x - P(A\cup B)]^2 - 3[x - P(A\cap B)]^2 = 3[(x - P(A\cup B))^2 - (x - P(A\cap B))^2]$$
$$= 3[x - P(A\cup B) + x - P(A\cap B)][x - P(A\cup B) - x + P(A\cap B)]$$
$$= 3[2x - P(A\cup B) - P(A\cap B)][P(A\cap B) - P(A\cup B)]$$

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow [2x - P(A\cup B) - P(A\cap B)][P(A\cap B) - P(A\cup B)] = 0$$
$$\Leftrightarrow 2x - P(A\cup B) - P(A\cap B) = 0, \text{ αφού } P(A\cup B) - P(A\cap B) \neq 0$$
$$\Leftrightarrow 2x - P(A) - P(B) + P(A\cap B) - P(A\cap B) = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{P(A)+P(B)}{2}$$

Επειδή $P(A\cap B) - P(A\cup B) < 0$, αφού γενικά $P(A\cap B) \leq P(A\cup B)$ και εδώ σύμφωνα με τα δεδομένα της άσκησης είναι $P(A\cap B) \neq P(A\cup B)$ (ερώτημα α), έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας της f:

x	$-\infty$	$\frac{P(A)+P(B)}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	γνησίως αύξουσα		γνησίως φθίνουσα

Από τον παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $x_o = \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.

γ. Εάν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα, τότε:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) \quad \text{και} \quad P(A\cap B) = 0,$$

οπότε ο τύπος της f γίνεται:

$$f(x) = [x - P(A) - P(B)]^3 - x^3.$$

Αντικαθιστώντας στον τύπο της f, όπως έχει διαμορφωθεί, το x διαδοχικά με $P(A)$ και $P(B)$ παίρνουμε:

$$f(P(A)) = [P(A) - P(A) - P(B)]^3 - [P(A)]^3 = -[P(B)]^3 - [P(A)]^3 \qquad (1)$$

και

$$f(P(B)) = [P(B) - P(A) - P(B)]^3 - [P(B)]^3 = -[P(A)]^3 - [P(B)]^3. \qquad (2)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (1) και (2) (δεύτερα μέλη ίσα) συμπεραίνουμε ότι:

$$f(P(A)) = f(P(B)).$$

9. Αν A και B είναι δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \lambda^2$ και $P(B) = 7\lambda^2 - 6\lambda + 2$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{4} \le \lambda \le \dfrac{1}{2}$.

<u>**Λύση**</u>

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι για κάθε $\lambda \in IR$ ισχύει $\lambda^2 \ge 0$ και $7\lambda^2 - 6\lambda + 2 > 0$ $(\Delta < 0)$. Αφού τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα έχουμε:

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) = \lambda^2 + (7\lambda^2 - 6\lambda + 2) = 8\lambda^2 - 6\lambda + 2. \qquad (1)$$

Επειδή η πιθανότητα ενός ενδεχομένου ανήκει στο διάστημα [0, 1], πρέπει να ισχύουν και οι σχέσεις:

$$\lambda^2 \le 1 \quad (2), \quad 7\lambda^2 - 6\lambda + 2 \le 1 \quad (3) \quad \text{και} \quad 8\lambda^2 - 6\lambda + 2 \le 1 \quad (4)$$

Λόγω της (1) αν ισχύει η (4), τότε θα ισχύουν και οι (2) και (3). Επομένως αρκεί να λύσουμε μόνο την ανίσωση (4). Έχουμε λοιπόν:

$$8\lambda^2 - 6\lambda + 2 \le 1 \Leftrightarrow 8\lambda^2 - 6\lambda + 1 \le 0 \Leftrightarrow 8(\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - \frac{1}{4}) \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \le \lambda \le \frac{1}{2}.$$

10. α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in IR$ ισχύει $e^x \ge x + 1$.

β. Αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με

$$P(A) + P(B) = \frac{1}{2}$$

να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{2} \le P(A')P(B') < \dfrac{\sqrt{e}}{e}$.

<u>**Λύση**</u>

α. Παρατηρούμε ότι η σχέση $e^x \geq x+1$ είναι ισοδύναμη με τη σχέση $e^x - x - 1 \geq 0$.
Επομένως για να αποδείξουμε την ζητούμενη ανισότητα μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - x - 1$ και να βρούμε την ελάχιστη τιμή της.
Η παράγωγος της f είναι $f'(x) = e^x - 1$.

Εύκολα βρίσκουμε ότι $f'(0) = 0$ και επίσης πως $f'(x) < 0$, αν $x < 0$ και $f'(x) > 0$, αν $x > 0$, οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα μονοτονίας της f:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	γνησίως φθίνουσα		γνησίως αύξουσα

Από τον παραπάνω πίνακα συμπεραίνουμε ότι η f για $x = 0$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της, που είναι το $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$.
Άρα για κάθε $x \in IR$ ισχύει $f(x) \geq f(0)$ ή $e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x + 1$. (1)

β. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} P(A')P(B') &= [1 - P(A)][1 - P(B)] \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B) \\ &= 1 - [P(A) + P(B)] + P(A)P(B) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + P(A)P(B) \\ &= \frac{1}{2} + P(A)P(B) \geq \frac{1}{2}, \text{ αφού } P(A)P(B) \geq 0. \quad (2) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το x στην (1) διαδοχικά με $-P(A)$ και με $-P(B)$ έχουμε:

$$e^{-P(A)} \geq -P(A) + 1 \Leftrightarrow e^{-P(A)} \geq 1 - P(A) \geq 0 \quad (3)$$

και
$$e^{-P(B)} \geq -P(B) + 1 \Leftrightarrow e^{-P(B)} \geq 1 - P(B) \geq 0. \quad (4)$$

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις (3) και (4) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} e^{-P(A)} e^{-P(B)} \geq [1 - P(A)][1 - P(B)] &\Leftrightarrow e^{-P(A) - P(B)} \geq P(A')P(B') \\ &\Leftrightarrow e^{-[P(A) + P(B)]} \geq P(A')P(B') \\ &\Leftrightarrow e^{-1/2} \geq P(A')P(B') \\ &\Leftrightarrow P(A')P(B') \leq \frac{\sqrt{e}}{e}. \quad (5) \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το " = " δεν ισχύει ποτέ στην (5), ενώ στη (2) ισχύει όταν $P(A) = 0$ ή $P(B) = 0$. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη αυτήν την παρατήρηση και συνδυάζοντας τις σχέσεις (2) και (5) έχουμε:

$$\frac{1}{2} \leq P(A')P(B') < \frac{\sqrt{e}}{e}.$$