Οι πράξεις της πρόσθεσης, της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των ακεραίων με εποπτικό τρόπο: Ένα μοντέλο ή ένα παιχνίδι;

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
www.p-theodoropoulos.gr

Περίληψη

Στην εργασία αυτή προτείνονται δύο τρόποι εποπτικής διδασκαλίας της πρόσθεσης, της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των ακεραίων αριθμών, ένας γεωμετρικός και ένας συνολοθεωρητικός.

Ο γεωμετρικός τρόπος στηρίζεται στο διανυσματικό πρότυπο και αποσκοπεί στην ερμηνεία και κατανόηση των αλγορίθμων των παραπάνω πράξεων.

Στον συνολοθεωρητικό τρόπο οι πράξεις ερμηνεύονται και εκτελούνται με σενάρια, τα οποία αποσκοπούν στην εύκολη απομνημόνευση των σχετικών κανόνων.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ως γνωστόν, η διδασκαλία των πράξεων στο σύνολο των ρητών αριθμών στο γυμνάσιο δεν είναι εύκολη υπόθεση. Αυτό οφείλεται στους αρνητικούς αριθμούς αλλά και στο πρόσημο που εισάγεται στην έννοια του αριθμού και αλλάζει την αντίληψη που έχουν σχηματίσει οι μαθητές για τους αριθμούς και τις πράξεις τους (επιστημολογικό εμπόδιο). Χαρακτηριστικά ο Μπάμπης Τουμάσης στο βιβλίο του "*Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*" αναφέρει: «Από την εμπειρία μας με τη διδακτική πράξη, ως δάσκαλοι των μαθηματικών, θα γνωρίζουμε ασφαλώς όλοι πόσο "δύσπεπτη" είναι για τους μαθητές η εξήγηση του κανόνα των προσήμων στους αρνητικούς αριθμούς».

Η ιστορική πορεία των αρνητικών αριθμών[1] δικαιολογεί τη δυσκολία που συναντούν οι μαθητές του γυμνασίου στην κατανόηση των πράξεων στο σύνολο των ρητών. Γι' αυτό, για να κατανοήσουν οι μαθητές τους αλγορίθμους των πράξεων και να μπορούν να τις εφαρμόζουν συνειδητά και με ευχέρεια, χρησιμοποιούνται διάφορα μοντέλα διδασκαλίας (Τουμάσης, 1994, σ. 270). Αυτό επιβάλλεται περισσότερο τώρα που η διδασκαλία των ρητών αριθμών μεταφέρθηκε στη Α΄ τάξη και οι μαθητές διδάσκονται τις πράξεις στο σύνολο των ρητών σε μικρότερη ηλικία.

Στην παρούσα εργασία επιχειρείται μια εποπτική παρουσίαση της πρόσθεσης, της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των ακεραίων με σκοπό να βοηθή-

[1] Ενώ χρησιμοποιούντο από πολύ παλιά, άρχισαν να γίνονται αποδεκτοί ως μαθηματικές οντότητες τον $17^{ο}$ αιώνα και θεμελιώθηκαν αυστηρά τον $19^{ο}$ αιώνα (Εξαρχάκος, 1988, σ. 251 & Τουμάσης, 1994, σ. 267).

σουμε τους μαθητές του γυμνασίου να κατανοήσουν τους αντίστοιχους αλγόριθμους. Εδώ η εποπτεία συνδυάζεται με προβλήματα από την καθημερινή ζωή και τονίζεται ότι οι αρνητικοί και οι θετικοί αριθμοί χρησιμοποιούνται για μεγέθη που επιδέχονται αντίθεση[2] (Α.Π.Σ., 2003). Η προσέγγιση αυτή αποσκοπεί στο να κατανοήσουν οι μαθητές τις πράξεις στο σύνολο των ακεραίων αριθμών μέσα από την εμπειρία αλλά και να συνειδητοποιήσουν τον λόγο εισαγωγής των αρνητικών και των θετικών αριθμών.

Οι τρόποι που προτείνονται υλοποιούνται εύκολα στην τάξη και συνοπτικά περιγράφονται ως εξής:

1. **Γεωμετρικός τρόπος:** Είναι ένα διδακτικό μοντέλο, το οποίο δομείται πάνω στο διανυσματικό πρότυπο και έχει ως μέσο τον άξονα (αριθμογραμμή). Στο μοντέλο αυτό δημιουργείται ένα εννοιολογικό μίγμα που είναι χρήσιμο για τη διδασκαλία των ρητών αριθμών. Να σημειωθεί ότι η διδακτική αξία του άξονα στη διδασκαλία των ρητών είναι σημαντική, διότι πάνω στον άξονα φαίνεται πολύ παραστατικά η αντίθεση και οι μαθητές συνειδητοποιούν με οπτικό τρόπο τον ρόλο των θετικών και των αρνητικών αριθμών. Επίσης, με τη βοήθεια του άξονα αποδίδεται καλύτερα και η σχέση της διάταξης.
2. **Συνολοθεωρητικός τρόπος:** Στο σύνολο των ακεραίων είναι δύσκολο να επινοηθεί και να χρησιμοποιηθεί ένα μοντέλο εποπτικής διδασκαλίας το οποίο να στηρίζεται στο συνολοθεωρητικό πρότυπο, αφού οι ακέραιοι αριθμοί δεν είναι πληθάριθμοι πεπερασμένων συνόλων όπως οι φυσικοί. Γι' αυτό λοιπόν, στην εργασία αυτή στοιχεία συνόλων «μαρκάρονται» ώστε να παριστάνουν θετικούς και αρνητικούς αριθμούς. Έτσι δημιουργούνται διάφορα διακριτά μοντέλα εποπτικής διδασκαλίας των πράξεων στο σύνολο των ακεραίων, τα οποία στηρίζονται στο συνολοθεωρητικό πρότυπο. Οι πράξεις στα μοντέλα αυτά περιγράφονται και εκτελούνται με σενάρια που αποσκοπούν στην εύκολη απομνημόνευση των κανόνων.

Πρέπει να σημειωθεί ότι και οι δύο οι τρόποι επιτρέπουν, μέσα από κατάλληλες δραστηριότητες, την ενεργό συμμετοχή των μαθητών στη διαδικασία της μάθησης, η οποία είναι απαραίτητη για την κατάκτηση της γνώσης.

3. ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Εποπτεία κατά τη διδασκαλία σημαίνει τη χρήση διάφορων μέσων, πέραν του λόγου, με σκοπό να ενεργοποιηθούν ορισμένες αισθήσεις και να γίνει έτσι η διδασκαλία πιο αποτελεσματική. Τα εποπτικά μέσα παρουσιάζουν τα νέα ερεθίσματα με ποικίλους τρόπους προσελκύοντας την προσοχή και το ενδιαφέρον των μαθητών (Τριλιανός, 1992, σ. 125). Η λέξη εποπτεία έχει τις ρίζες της στο ρήμα ορώ (βλέπω), αφού η κατεξοχήν αίσθηση που χρησιμοποιείται είναι η όραση. Η συμμετοχή πολλών αισθήσεων διευκολύνει την μάθηση επειδή, όπως έχει αποδειχθεί, όσο πιο πολλές αισθήσεις συμμετέχουν στη διαδικασία της μάθησης τόσο πιο πολλές γνώσεις συγκρατούμε. Όταν μάλιστα συμμετέχουμε και ενεργά στη διαδικασία, τότε το ποσοστό των γνώσεων που συγκρατούμε είναι μεγαλύτερο.

Ένας σύγχρονος εκπαιδευτικός δεν μπορεί να αγνοεί την αξία των εποπτικών μέσων και υποχρέωσή του είναι να βρίσκει κάθε φορά τα κατάλληλα προκειμένου να επιτευχθούν οι διδακτικοί στόχοι. Η επιλογή των κατάλληλων εποπτικών μέσων αποτελεί

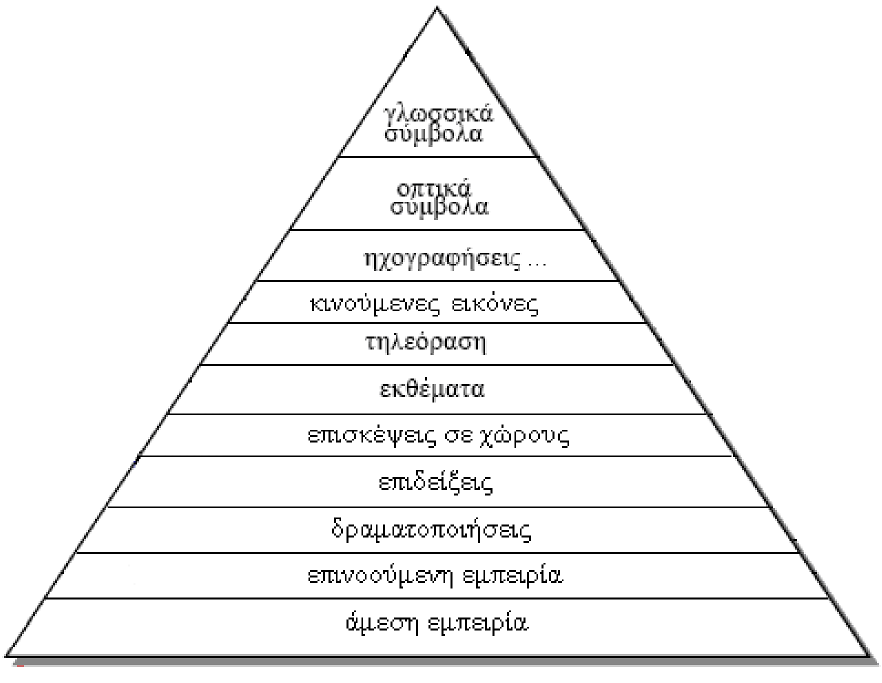
[2] Στα προβλήματα που λύνουμε στους μαθητές με συγκεκριμένα μεγέθη καλό είναι να ερμηνεύουμε κάθε φορά το πρόσημο των τιμών των μεγεθών του προβλήματος, ώστε να συνειδητοποιούν οι μαθητές τον ρόλο του προσήμου.

βασικό στοιχείο του σχεδιασμού της διδασκαλίας και εξαρτάται από διάφορους παράγοντες.

Ο Dale ταξινόμησε τα εποπτικά μέσα σε 11 κατηγορίες–ζώνες[3] κατασκευάζοντας έναν κώνο εμπειριών, ανάλογα με τον βαθμό της αισθητηριακής συμμετοχής. Καθώς προχωρούμε από τη βάση του κώνου προς την κορυφή ο βαθμός της σχέσης των εποπτικών μέσων με την πραγματικότητα μειώνεται σταδιακά. Τα επίπεδα του κώνου αυτού από τη βάση προς την κορυφή είναι:

1. Άμεση εμπειρία: Επαφή με τα αντικείμενα και τα γεγονότα.
2. Έμμεση ή επινοούμενη εμπειρία: Αναπαράσταση της πραγματικότητας (συλλογές, απομιμήσεις, προπλάσματα κλπ.).
3. Δραματοποιημένη εμπειρία: Ο μαθητής υποδύεται ρόλους και αναπαριστάνει πραγματικότητες του παρόντος ή του παρελθόντος αναβιώνοντας διάφορες καταστάσεις.
4. Επιδείξεις: Παρουσιάσεις αντικειμένων ή διαδικασιών τις οποίες παρακολουθεί ο μαθητής και μπορεί να τις επαναλαμβάνει.
5. Επισκέψεις σε χώρους: Εδώ οι μαθητές απλώς παρακολουθούν.
6. Εκθέματα: Περιλαμβάνουν εικόνες, φωτογραφίες, σχεδιαγράμματα, προπλάσματα και άλλα αντικείμενα τοποθετημένα σε μια σειρά προκειμένου να καλυφθεί ένα θέμα.
7. Τηλεόραση.
8. Κινούμενες εικόνες.
9. Σταθερές εικόνες, ηχογραφήσεις, ραδιόφωνο.
10. Οπτικά σύμβολα: Αφηρημένες αναπαραστάσεις αντικειμένων ή γεγονότων, όπως χάρτες, γραφικές παραστάσεις, σχήματα, σκίτσα κλπ.
11. Γλωσσικά σύμβολα: Γραπτός και προφορικός λόγος.

Εποπτικά τα επίπεδα του κώνου εμπειριών του Dale παρουσιάζονται στο παρακάτω σχήμα.



---
[3] E. Dale: *Audiovisual Methods in teaching*, 1969.

Σύμφωνα με τον Bruner τα παιδιά πρώτα κινούνται σε επίπεδο δράσης, κατόπιν προχωρούν στο εικονικό επίπεδο και τέλος στο συμβολικό.

Είναι αναμφισβήτητο ότι η εποπτεία παίζει σημαντικό ρόλο και στη διδασκαλία των Μαθηματικών, διότι η αισθητηριακή αντίληψη βοηθά πολύ στη σύλληψη και κατανόηση αφηρημένων μαθηματικών εννοιών. Στα Μαθηματικά η εποπτεία μπορεί να επιτευχθεί με διάφορους τρόπους, όπως με πίνακες, με σχήματα, με διαγράμματα, με γραφικές παραστάσεις, με κατασκευές κλπ. Στις μέρες μας και ο ηλεκτρονικός υπολογιστής με τις δυνατότητες που έχει μπορεί να προσφέρει σημαντική βοήθεια προς αυτήν την κατεύθυνση.

Τέλος, πρέπει να σημειωθεί ότι με την εποπτεία ενθαρρύνεται η ενεργός συμμετοχή των μαθητών στη διαδικασία της μάθησης, διεγείρεται η ενόρασή τους και πολλές φορές οδηγούνται οι ίδιοι στην ανακάλυψη ή ανακατασκευή της γνώσης.

3. Η ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΕΠΟΠΤΙΚΑ

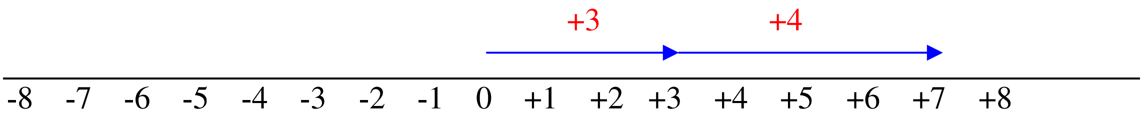
3.1 Γεωμετρικός τρόπος

Με τον γεωμετρικό τρόπο εποπτικής διδασκαλίας της πρόσθεσης ακεραίων που προτείνεται εδώ οι όροι του αθροίσματος δύο ακεραίων παριστάνονται ως δύο διαδοχικές μετατοπίσεις πάνω στον άξονα ξεκινώντας από την αρχή του άξονα. Το άθροισμα των δύο ακεραίων αριθμών είναι ο ακέραιος που αντιστοιχεί στην τελική θέση.

Αρχικά προτείνουμε στους μαθητές να σχεδιάσουν έναν άξονα στο τετράδιό τους και ταυτόχρονα τον σχεδιάζουμε και στον πίνακα. Ενημερώνουμε στη συνέχεια τους μαθητές ότι μετατόπιση πάνω στον άξονα κατά έναν ακέραιο “*α*” σημαίνει μετακίνηση από ένα σημείο του άξονα σε ένα άλλο με κατεύθυνση σύμφωνα με το πρόσημο του “*α*”, δηλαδή, αν ο α είναι θετικός η μετακίνηση γίνεται προς τα δεξιά, ενώ αν είναι αρνητικός προς τα αριστερά και τόσες μονάδες όση είναι η απόλυτη τιμή του “*α*”. Αναφέρουμε ακόμη πως με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να απεικονίζουμε γεωμετρικά πάνω στον άξονα έναν ακέραιο αριθμό ή έναν ρητό γενικότερα σχεδιάζοντας με βέλος την μετατόπιση (δείτε και Αλιμπινίσης Α. κλπ., 2006). Κατόπιν δίνουμε ένα πρόβλημα πρόσθεσης θετικών ακεραίων, όπως το παρακάτω.

Πρόβλημα: *Η τιμή ενός προϊόντος το πρώτο εξάμηνο ενός έτους αυξήθηκε κατά 3 € και το δεύτερο εξάμηνο κατά 4 €. Να βρείτε τη συνολική ετήσια μεταβολή*[4] *της τιμής του προϊόντος αυτού.*

Για να έχουν οι μαθητές εποπτική αντίληψη της διαδικασίας, προτείνουμε να κάνουν σχηματική αναπαράσταση των δεδομένων του προβλήματος σχεδιάζοντας με βέλη πάνω στον άξονα τις διαδοχικές μεταβολές της τιμής. Έτσι προκύπτει το σχήμα:



το οποίο το κάνουμε και στον πίνακα. Στη συνέχεια καθοδηγούμε τους μαθητές να συμπεράνουν ότι η συνολική ετήσια μεταβολή της τιμής του προϊόντος αυτού είναι ίση με

---

[4] Η μεταβολή της τιμής ενός προϊόντος επιδέχεται αντίθεση, διότι η τιμή του προϊόντος μπορεί να αυξάνεται (πρόσημο “+”) ή να μειώνεται (πρόσημο “-”).

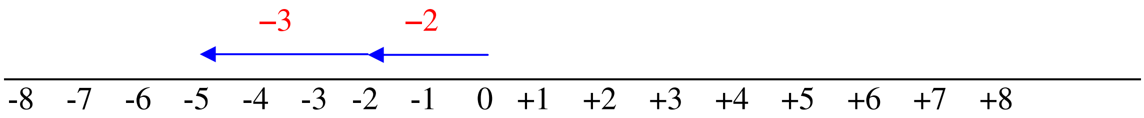
$$(+3) + (+4) = +7,$$

δηλαδή η τιμή του προϊόντος αυτού αυξήθηκε κατά την διάρκεια του έτους κατά 7 €.

Για την πρόσθεση αρνητικών ακεραίων μπορούμε να δώσουμε το επόμενο πρόβλημα.

Πρόβλημα: *Η ζημιά μιας οικογενειακής επιχείρησης στο πρώτο τρίμηνο ενός εξαμήνου ήταν 2 χιλιάδες € και στο δεύτερο 3 χιλιάδες €. Να βρείτε τη συνολική μεταβολή της οικονομικής κατάστασης της επιχείρησης κατά το εξάμηνο αυτό.*

Πληροφορούμε τους μαθητές ότι συνηθίζεται η ζημιά να παριστάνεται με το πρόσημο "–" και το κέρδος με το "+" και τους καθοδηγούμε με κατάλληλες ερωτήσεις να συμπεράνουν ότι για να βρούμε τη συνολική μεταβολή της οικονομικής κατάστασης της επιχείρησης θα πρέπει να βρούμε το άθροισμα των δύο ακεραίων –2 και –3, το οποίο εποπτικά φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



από το οποίο οι μαθητές θα συμπεράνουν ότι:

$$(-2) + (-3) = -5,$$

δηλαδή η επιχείρηση το συγκεκριμένο εξάμηνο είχε ζημιά 5 χιλιάδες €.

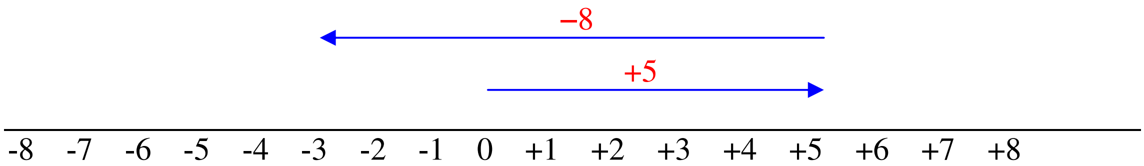
Αν χρειασθεί, δίνουμε και άλλα παραδείγματα έως ότου οι μαθητές κατανοήσουν τον τρόπο εκτέλεσης της πρόσθεσης ομοσήμων ακεραίων και διατυπώσουν μόνοι τους τον κανόνα.

Παρατήρηση: Οι μαθητές ίσως δεν δυσκολευτούν να απαντήσουν διαισθητικά στα παραπάνω προβλήματα, οπότε η εποπτεία δεν είναι τόσο απαραίτητη. Είναι όμως χρήσιμη, διότι υποστηρίζει οπτικά τη σκέψη και προετοιμάζει το έδαφος για την πρόσθεση ετεροσήμων ακεραίων, που είναι πιο δύσκολη διαδικασία.

Για την πρόσθεση ετεροσήμων ακεραίων μπορούμε να δώσουμε το παρακάτω πρόβλημα.

Πρόβλημα: *Στο καζίνο, ένας παίκτης έλαβε μέρος διαδοχικά σε δύο παιχνίδια. Στο πρώτο κέρδισε 5 χιλιάδες € και στο δεύτερο έχασε 8 χιλιάδες €. Ποια μεταβολή επήλθε στην οικονομική του κατάσταση;*

Το αποτέλεσμα ενός παιχνιδιού στο καζίνο για έναν παίκτη επιδέχεται αντίθεση, διότι ο παίκτης μπορεί να κερδίσει (πρόσημο "+") ή να χάσει (πρόσημο "-"). Έτσι, για τον παίκτη του παραπάνω προβλήματος τα αποτελέσματα των δύο παιχνιδιών είναι +5 και –8 αντίστοιχα. Το συνολικό αποτέλεσμα είναι η σύνθεση των δύο καταστάσεων (Γαγάτσης, 1995, σ. 66), δηλαδή το άθροισμα των αριθμών (+5) και (–8), το οποίο εποπτικά φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (μετράμε σε χιλιάδες €):



Οι μαθητές με σωστή καθοδήγηση και με την προηγούμενη εμπειρία θα συμπεράνουν ότι:

$$(+5) + (-8) = -3,$$

δηλαδή ο παίκτης αυτός έχασε τελικά 3 χιλιάδες €.
Σημείωση: Για να πείσουμε τους μαθητές ότι στο παραπάνω πρόβλημα πρέπει να κάνουμε πρόσθεση, μπορούμε να συγκρίνουμε τα δεδομένα του προβλήματος με τις περιπτώσεις ο παίκτης να κέρδιζε ή να έχανε και στα δύο παιχνίδια.

Αν κριθεί απαραίτητο, μπορούν να δοθούν και άλλα παραδείγματα και με άλλα μεγέθη, όπως θερμοκρασία, μετατόπιση κλπ. με βασική επιδίωξη να κατανοήσουν οι μαθητές την πρόσθεση μεταξύ δύο ετεροσήμων ακεραίων και να διατυπώσουν μόνοι τους τον κανόνα.

Το πλεονέκτημα της παραπάνω σχηματικής αναπαράστασης είναι ότι οι μαθητές βλέπουν πως οι μονάδες του ακεραίου με την μικρότερη απόλυτη τιμή αναιρούνται από ισάριθμες μονάδες του ακεραίου με την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή και πως το άθροισμα των δύο αριθμών (πρόσημο και απόλυτη τιμή) καθορίζεται από τις μονάδες που περισσεύουν. Γεωμετρικά το πλήθος των μονάδων που περισσεύουν εκφράζεται με τη διαφορά των μηκών των βελών, που αντιστοιχεί στη διαφορά των απολύτων τιμών των όρων του αθροίσματος. Επίσης, κατανοούν ότι αν οι αριθμοί είναι αντίθετοι, τότε το άθροισμά τους είναι ίσο με μηδέν.

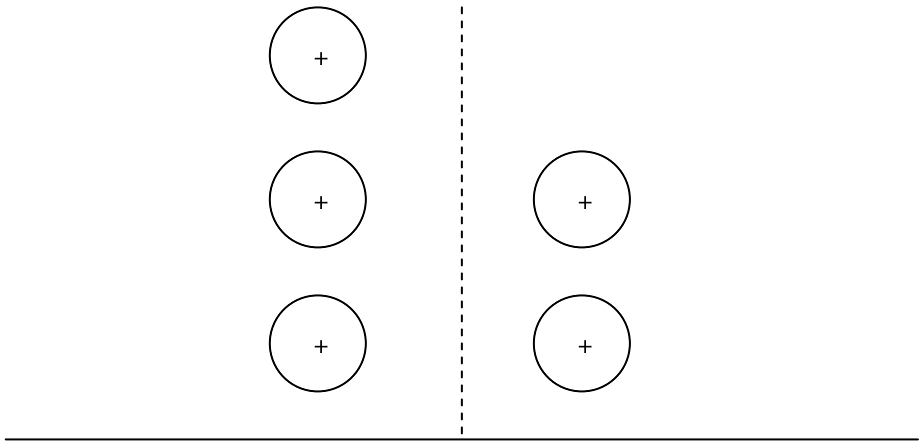
3.2 Συνολοθεωρητικός τρόπος

Κατά τον συνολοθεωρητικό τρόπο εποπτικής διδασκαλίας της πρόσθεσης ακεραίων προτείνουμε στους μαθητές να σχεδιάσουν στο τετράδιό τους δύο κάθετες γραμμές σε σχήμα ανάποδου “ταυ” με διακεκομμένη[5] την κατακόρυφη γραμμή και τους λέμε ότι στις δύο γωνίες που σχηματίζονται θα τοποθετούμε τους δύο ακεραίους που θέλουμε να προσθέσουμε, έναν σε κάθε γωνία. Κάθε αριθμός θα παριστάνεται με ένα σύνολο, τα στοιχεία του οποίου θα είναι μαρκαρισμένες μπάλες, με το “+” αν ο αριθμός είναι θετικός ή με το “–” αν είναι αρνητικός. Οι μπάλες για κάθε αριθμό θα είναι τόσες, όση είναι η απόλυτη τιμή του αριθμού.

Και στον συνολοθεωρητικό τρόπο εποπτικής διδασκαλίας καλό είναι να ξεκινάμε με την πρόσθεση δύο ομοσήμων ακεραίων και πιο συγκεκριμένα πρώτα δύο θετικών και μετά δύο αρνητικών και στη συνέχεια δύο ετεροσήμων.

Έστω λοιπόν ότι θέλουμε να προσθέσουμε τους θετικούς ακέραιους +3 και +2. Προτείνουμε στους μαθητές να παραστήσουν τους αριθμούς αυτούς τοποθετώντας μπάλες στις δύο γωνίες, όπως αναφέραμε, οπότε προκύπτει το παρακάτω σχήμα, το οποίο το σχεδιάζουμε και στον πίνακα.

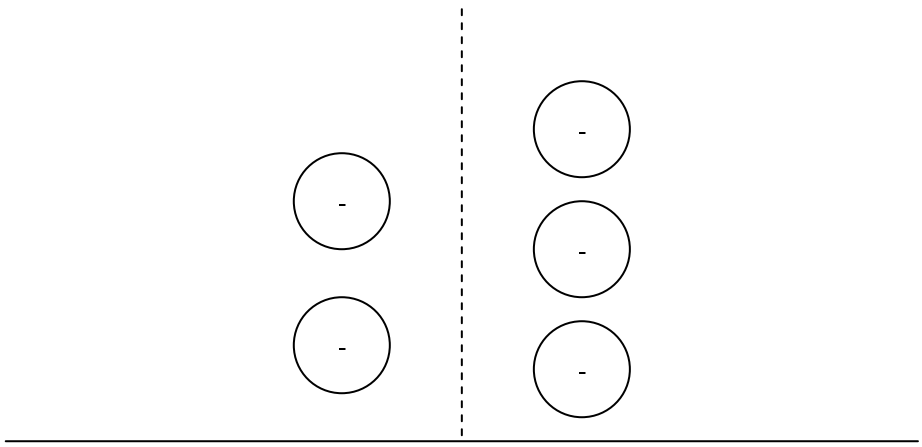
[5] Η γραμμή αυτή θα είναι διακεκομμένη για να υποδηλώνει ότι δημιουργείται μία ολότητα.



Στη συνέχεια, ζητάμε από τους μαθητές να βρουν το άθροισμα των δύο αριθμών κατευθύνοντάς τους προς το συνολοθεωρητικό πρότυπο σκέψης, ώστε να ενώσουν τα δύο σύνολα, που έχουν όμοιες μπάλες (ομοειδή ποσά) και να συμπεράνουν ότι:

$$(+3) + (+2) = +5.$$

Κατόπιν ζητάμε από τους μαθητές να προσθέσουν και τους αρνητικούς ακέραιους −2 και −3, οπότε δημιουργείται το παρακάτω σχήμα:



από το οποίο με τον ίδιο τρόπο θα συμπεράνουν ότι:

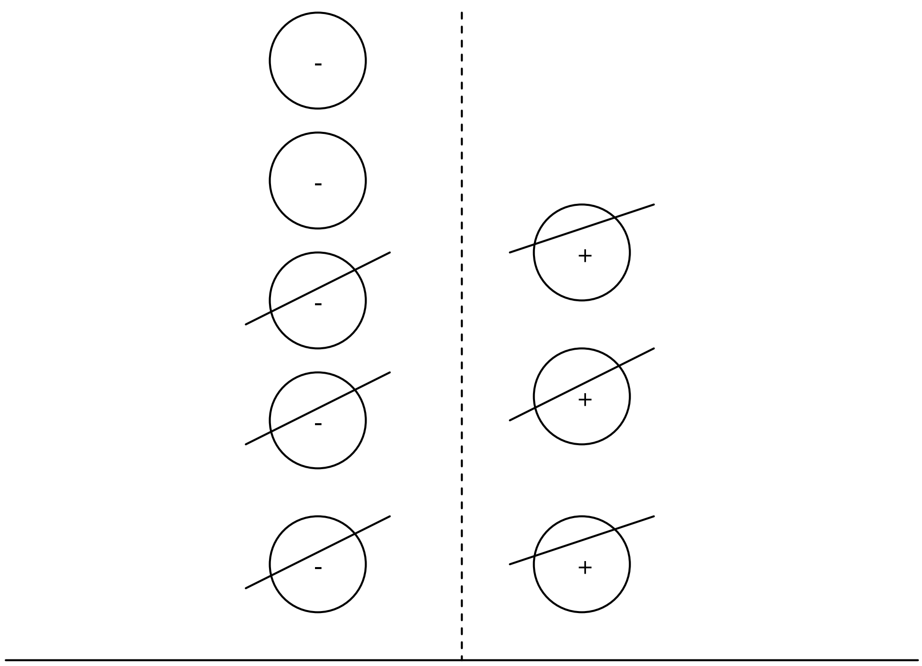
$$(-2) + (-3) = -5.$$

Τα παραπάνω σχήματα μπορεί να αναφέρονται σε αφηρημένους αριθμούς ή και σε συγκεκριμένους, δηλαδή να αποτελούν σχηματική αναπαράσταση των δεδομένων ενός προβλήματος από την καθημερινή ζωή.

Στην πρόσθεση όμως δύο ετεροσήμων ακεραίων τα πράγματα είναι διαφορετικά. Στην περίπτωση αυτή δεν έχουμε «ομοειδή ποσά», οπότε δεν μπορεί να γίνει η πρόσθεση με τον παραπάνω τρόπο, δηλαδή με την ένωση των συνόλων. Γι’ αυτό εδώ για να κατανοήσουν οι μαθητές τη διαδικασία και τον αντίστοιχο αλγόριθμο μπορούμε να δώσουμε ένα από τα παρακάτω σενάρια.

Σενάριο 1^{ο}: Θεωρούμε ότι η απόλυτη τιμή του αρνητικού όρου ενός αθροίσματος δύο ετεροσήμων ακεραίων εκφράζει τον αριθμό των ηλεκτρονίων ενός ατόμου και του θετικού τον αριθμό των πρωτονίων. Για κάθε ηλεκτρόνιο του ατόμου αυτού θα τοποθετούμε μία "αρνητική" μπάλα σε μία από τις δύο γωνίες και για κάθε πρωτόνιο μία "θετική" στην άλλη. Αθροίζοντας ηλεκτρικά τα θετικά και αρνητικά φορτία θα βρίσκουμε το ηλεκτρικό φορτίο του ατόμου. Υπενθυμίζουμε στους μαθητές ότι ένα πρωτόνιο με ένα ηλεκτρόνιο αλληλοαναιρούνται ηλεκτρικά και έτσι οι μαθητές θα συμπεράνουν ότι για να βρεθεί το ηλεκτρικό φορτίο του ατόμου (επομένως και το άθροισμα των δύο ετερόσημων ακέραιων αριθμών) πρέπει να διαγράφεται μία "θετική" μπάλα από το ένα σύνολο με μία "αρνητική" από το άλλο (αλληλοαναίρεση) μέχρι να εξαντληθούν οι μπάλες του ενός συνόλου. Οι μπάλες που δεν θα διαγράφονται θα καθορίζουν το άθροισμα των δύο αριθμών (απόλυτη τιμή και πρόσημο).

Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να προσθέσουμε τους ακέραιους −5 και +3. Οι μαθητές θα ενεργήσουν σύμφωνα με το σενάριο, οπότε θα προκύψει το παρακάτω σχήμα:



στο οποίο φαίνεται καθαρά ότι:

$$(-5) + (+3) = -2.$$

Σενάριο 2^{ο}: (*Το παιχνίδι των ερωτήσεων*). Ένας παίχτης Α υποβάλλει ερωτήσεις σε έναν παίχτη Β. Για κάθε ερώτηση τοποθετεί μία "θετική" μπάλα στη μία από τις δύο γωνίες του σχήματος, αν η απάντηση του Β είναι σωστή ή μία "αρνητική" στην άλλη γωνία, αν ο Β δεν απαντήσει ή η απάντησή του δεν είναι σωστή. Κάθε μπάλα αντιστοιχεί σε μία αντίστοιχη μονάδα. Όταν τελειώσουν οι ερωτήσεις αθροίζονται οι επί μέρους βαθμολογίες και εξάγεται η τελική βαθμολογία του παίχτη Β. Στο παιχνίδι επιτρέπεται και η αρνητική βαθμολογία, η οποία σε περίπτωση στοιχήματος σημαίνει ότι ο παίχτης Β θα πληρώσει το αντίστοιχο ποσό, ενώ αν η βαθμολογία του είναι θετική, τότε θα εισπράξει το αντίστοιχο ποσό.

Στο σενάριο αυτό πιστεύω ότι οι μαθητές διαισθάνονται πως πρέπει να διαγράφεται μία "θετική" μπάλα από το ένα σύνολο με μία "αρνητική" από το άλλο, επειδή αντιστοιχούν σε δύο αντίθετες μονάδες, οι οποίες αλληλοαναιρούνται και έτσι οδηγούνται στη σύλληψη και κατανόηση του αλγορίθμου της πρόσθεσης δύο ετεροσήμων ακεραίων.

Για παράδειγμα, αν σε ένα παίχτη υποβλήθηκαν 8 ερωτήσεις και αυτός απάντησε σωστά στις 3, ποια θα είναι η τελική βαθμολογία του; (δείτε το παραπάνω σχήμα).

Να σημειωθεί ότι στα παραπάνω παραδείγματα φαίνεται η χαρακτηριστική ιδιότητα ενός διακριτού μοντέλου να παρουσιάζει αρνητικούς και θετικούς ακέραιους ως ανεξάρτητες οντότητες και να αποδίδεται έτσι πολύ παραστατικά ο αλγόριθμος της πρόσθεσης στο σύνολο των ακεραίων.

4. Η ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΕΠΟΠΤΙΚΑ

4.1 Γεωμετρικός τρόπος

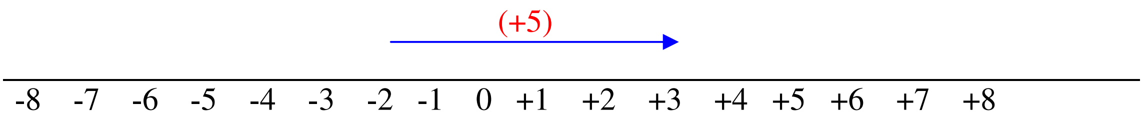
Γνωρίζουμε ότι η διαφορά δύο αριθμών, ανάλογα με το πρόβλημα, ερμηνεύεται άλλοτε ως διαφορά (αποτέλεσμα σύγκρισης), άλλοτε ως συμπλήρωμα (πρόσθεση μιας ποσότητας) και άλλοτε ως υπόλοιπο (απόσπαση του αφαιρετέου από τον μειωτέο). Στην εποπτική διδασκαλία της αφαίρεσης με γεωμετρικό τρόπο τη διαφορά δύο ακεραίων αριθμών θα τη βρίσκουμε με την μέθοδο του συμπληρώματος, δηλαδή θα βρίσκουμε τον αριθμό που πρέπει να προσθέσουμε στον αφαιρετέο ώστε να προκύψει ο μειωτέος. (Ας θυμηθούμε, για παράδειγμα, πώς μας δίνει τα ρέστα ο περιπτεράς). Άλλωστε ο αριθμός $\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}$ ορίζεται ως ο αριθμός που πρέπει να προστεθεί στον $\boldsymbol{\beta}$ για να προκύψει ο $\boldsymbol{\alpha}$. Με αυτόν τον ορισμό είναι εξοικειωμένοι οι μαθητές, διότι έτσι ορίζεται στο σχολικό βιβλίο η διαφορά δύο φυσικών αριθμών.

Για τη διδασκαλία της αφαίρεσης στο σύνολο των ακεραίων αρχικά μπορούμε να δώσουμε το επόμενο πρόβλημα.

Πρόβλημα: *Πάρκαρε κάποιος το αυτοκίνητό του στον χώρο στάθμευσης, που βρίσκεται στο δεύτερο υπόγειο (–2) της πολυκατοικίας στην οποία είναι το διαμέρισμά του. Πόσους ορόφους πρέπει να ανέβει για να πάει στο διαμέρισμά του, το οποίο βρίσκεται στον τρίτο (+3) όροφο;*

Γίνεται αντιληπτό διαισθητικά, το αντιλαμβάνονται και οι μαθητές, ότι θα ανέβει τόσους ορόφους, όση είναι η "υψομετρική διαφορά" (σε ορόφους), που έχουν οι δύο θέσεις, ο χώρος στάθμευσης και το διαμέρισμα, δηλαδή θα ανέβει (+3) – (–2) ορόφους.

Προτείνουμε στους μαθητές να βρουν τον αριθμό αυτόν με την μέθοδο του συμπληρώματος, δηλαδή να βρουν τον αριθμό που πρέπει να προστεθεί στο –2 ώστε να προκύψει το +3. Τους προτείνουμε και τους καθοδηγούμε να παραστήσουν τον αριθμό αυτόν γεωμετρικά με ένα βέλος πάνω στον άξονα, δηλαδή να σχεδιάσουν ένα βέλος από το –2 μέχρι το +3 (το βέλος θα δείχνει τη μετατόπιση που θα γίνει). Οι μαθητές μετρώντας θα βρουν ότι θα ανέβει (θετική κατεύθυνση) 5 ορόφους (απόλυτη τιμή), δηλαδή η διαφορά που θέλουμε να βρούμε είναι +5. Τον αριθμό αυτόν μπορούν να τον σημειώσουν και πάνω στο σχήμα, το οποίο διαμορφώνεται ως εξής:

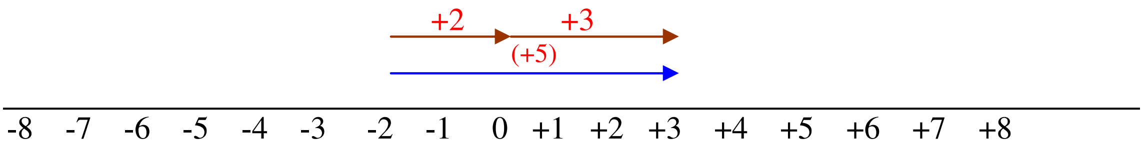


Έτσι λοιπόν, οι μαθητές κατανοούν ότι:

$$(+3) - (-2) = +5.$$

Στη συνέχεια, καθοδηγούμε τους μαθητές να βρουν την παραπάνω διαφορά νοερά σε δύο βήματα, δηλαδή να σκεφτούν ως εξής: «*θα ανέβει* 2 *ορόφους μέχρι το ισόγειο και* 3 *από το ισόγειο και πάνω, συνολικά* 5». Κατόπιν προτείνουμε να μεταφέρουν αυτή τη σκέψη στο σχήμα, αναλύοντας τη διαδικασία της μετατόπισης σε δύο φάσεις με σημείο αναφοράς την αρχή του άξονα, δηλαδή πρώτα θα γίνει η μετάβαση από το −2 στο 0 και μετά από το 0 στο +3 (τελική θέση).

Έτσι προκύπτει το σχήμα:



στο οποίο φαίνεται καθαρά ότι:

$$\begin{aligned} (+3) - (-2) &= (+2) + (+3) \\ &= (+3) + (+2) \quad \text{(Αντιμεταθετική ιδιότητα)} \\ &= +5. \end{aligned}$$

Με την ανάλυση της μετατόπισης σε δύο φάσεις οι μαθητές παρατηρούν εποπτικά ότι για να βρούμε τη διαφορά

$$(+3) - (-2),$$

αρκεί να προσθέσουμε στο +3 τον αντίθετο του −2 (για να μεταβούμε από το −2 στο 0 ακολουθούμε αντίθετη κατεύθυνση από αυτήν του −2).

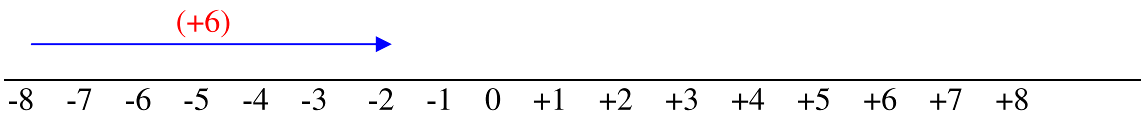
Κατόπιν δίνουμε και το επόμενο πρόβλημα.

Πρόβλημα: *Σε μια πόλη, ένα πρωί η θερμοκρασία ήταν* -8^{o} *C και το μεσημέρι της ίδιας ημέρας η θερμοκρασία ήταν* -2^{o} *C. Να βρείτε πόσους βαθμούς Κελσίου μεταβλήθηκε η θερμοκρασία στην πόλη αυτή από το πρωί έως το μεσημέρι.*

Είναι φανερό, το αντιλαμβάνονται και οι μαθητές, ότι για να βρούμε την μεταβολή της θερμοκρασίας πρέπει να αφαιρέσουμε από την τελική θερμοκρασία την αρχική, δηλαδή η θερμοκρασία μεταβλήθηκε κατά

$$(-2) - (-8)$$

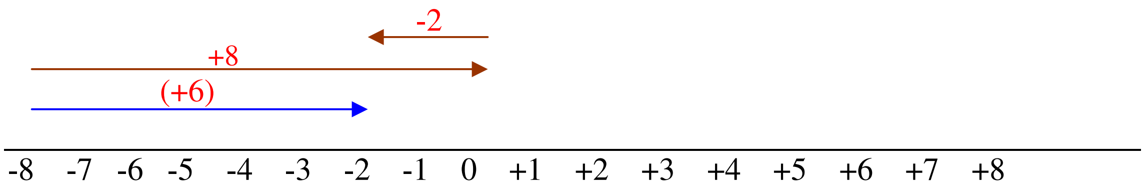
βαθμούς Κελσίου. Για να βρούμε την παραπάνω διαφορά πρέπει να βρούμε ποιος αριθμός προστέθηκε στο −8 για να προκύψει το – 2 (συμπλήρωμα). Πάλι οι μαθητές θα σχεδιάσουν ένα βέλος από το −8 έως το −2 και μετρώντας θα βρουν πως για να μεταβούμε από το −8 στο −2 πρέπει να “ανέβουμε” (κίνηση προς τα δεξιά) 6 μονάδες (+6). Έτσι, το σχήμα διαμορφώνεται ως εξής:



στο οποίο φαίνεται ότι:

$$(-2) - (-8) = +6.$$

Στη συνέχεια, προτείνουμε στους μαθητές να αναλύσουν τη μετάβαση από το -8 στο -2 σε δύο φάσεις, όπως στο προηγούμενο πρόβλημα, δηλαδή πρώτα να γίνει η μετάβαση από το -8 στο 0 και μετά από το 0 στο -2, οπότε προκύπτει το επόμενο σχήμα:



από το οποίο οι μαθητές και με τη δική μας βοήθεια και καθοδήγηση θα συμπεράνουν ότι:

$$\begin{aligned}(-2) - (-8) &= (+8) + (-2)\\ &= (-2) + (+8)\\ &= +6\end{aligned}$$

Δίνοντας και άλλα τέτοια παραδείγματα θα βοηθήσουμε τους μαθητές να ανακαλύψουν τον τρόπο εκτέλεσης της αφαίρεσης δύο ακεραίων και να διατυπώσουν μόνοι τους τον κανόνα.

Παρατηρούμε ότι στην παραπάνω σχηματική αναπαράσταση φαίνεται πολύ παραστατικά η γεωμετρική ερμηνεία της αλγεβρικής σχέσης:

$$\alpha - \beta = \alpha + (-\beta).$$

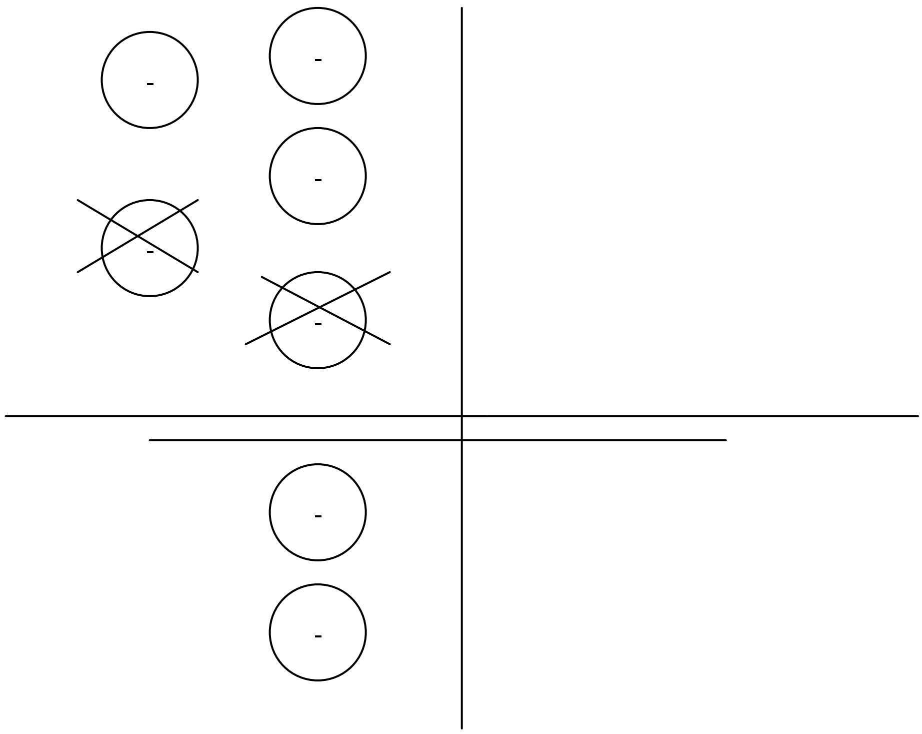
Με την κατάλληλη καθοδήγηση λοιπόν οι μαθητές θα ανακαλύψουν αυτήν τη σχέση και έτσι δεν θα τη μάθουν μηχανικά, οπότε θα μπορούν να την εφαρμόζουν συνειδητά.

4.2 Συνολοθεωρητικός τρόπος

Με τον συνολοθεωρητικό τρόπο εποπτικής διδασκαλίας της αφαίρεσης δύο ακεραίων η διαφορά ερμηνεύεται ως υπόλοιπο, δηλαδή από τον μειωτέο αποσπάται ο αφαιρετέος και ο αριθμός που μένει καθορίζει το αποτέλεσμα της αφαίρεσης. Εδώ ζητάμε από τους μαθητές να σχεδιάσουν δύο κάθετες ευθείες γραμμές και τους ενημερώνουμε ότι στις δύο γωνίες αριστερά ή δεξιά θα τοποθετούμε τους ακέραιους που θέλουμε να αφαιρέσουμε, στην πάνω γωνία τον μειωτέο και στην κάτω τον αφαιρετέο. Οι αριθμοί θα παριστάνονται με μαρκαρισμένες μπάλες όπως και στην πρόσθεση. Για να ξεχωρίζει η πράξη της αφαίρεσης, αλλά και ο αφαιρετέος, συμπληρώνουμε το σχήμα προσθέτοντας κάτω από την οριζόντια γραμμή ένα ευθύγραμμο τμήμα. Αφού τοποθετήσουμε τους αριθμούς στις γωνίες, όπως αναφέραμε, θα διαγράφουμε από τον μειωτέο τις μπάλες που αντιστοιχούν στον αφαιρετέο (πλήθος και πρόσημο).

Εξυπηρετεί να ξεκινήσουμε την διδασκαλία με ένα παράδειγμα εύρεσης της διαφοράς δύο ομόσημων ακεραίων όπου ο μειωτέος να έχει την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή. Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να βρούμε τη διαφορά: (–5) – (–2).

Παρατηρούμε ότι στη σχηματική αναπαράσταση μειωτέος και αφαιρετέος έχουν όμοιες μπάλες με τον μειωτέο να έχει τις περισσότερες, οπότε μπορούμε να αφαιρέσουμε από τον μειωτέο όσες μπάλες έχει ο αφαιρετέος (αφαιρούμε ομοειδή ποσά). Σχηματίζεται έτσι το παρακάτω σχήμα (βάζουμε ένα Χ σ' αυτές που αφαιρούμε):



στο οποίο φαίνεται ότι

$$(-5) - (-2) = -3.$$

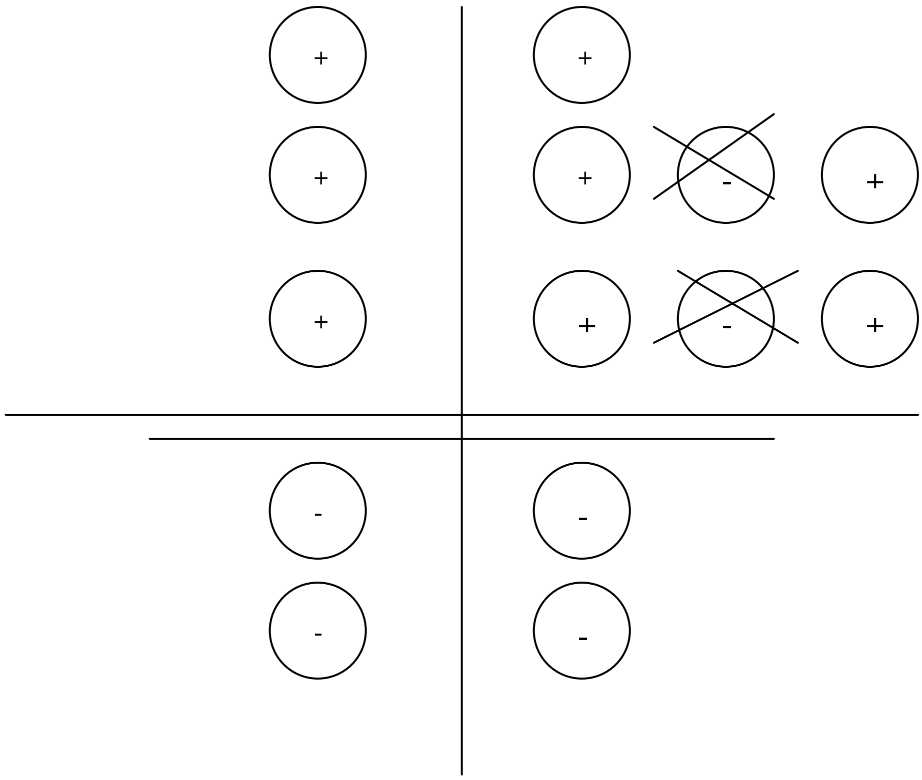
Στην περίπτωση αυτή δεν απαιτείται ο ειδικός αλγόριθμος. Μπορούμε όμως, αν θέλουμε, να τον επαληθεύσουμε.

Αν τώρα οι όροι της αφαίρεσης είναι ετερόσημοι ή ομόσημοι με τον μειωτέο να έχει την μικρότερη απόλυτη τιμή, τότε αρχικά θα τοποθετούμε τις μπάλες στις αριστερές γωνίες χωρίς να μπορούμε να αφαιρέσουμε μπάλες από τον μειωτέο, διότι ή δεν θα υπάρχουν όμοιες ή δεν θα υπάρχουν τόσες, όσες χρειάζονται. Στις περιπτώσεις αυτές πιθανόν να δημιουργηθεί και ένα επιστημολογικό εμπόδιο. «*Πώς μπορούμε να αφαιρέσουμε από ένα σύνολο αντικείμενα που δεν περιέχονται σ' αυτό*;» Για να λυθεί το πρόβλημα και να μπορεί να γίνει η αφαίρεση προτείνουμε την παρακάτω διαδικασία:

Ξαναγράφουμε όλες τις μπάλες στις αντίστοιχες δεξιές γωνίες προσθέτοντας στον μειωτέο ίδιες μπάλες με αυτές που έχει ο αφαιρετέος και ίσου πλήθους, ώστε να μπορούμε να τις αφαιρέσουμε. Όμως, όπως είδαμε, μία αρνητική μπάλα αλληλοαναιρείται με μία θετική. Επομένως για κάθε μπάλα που προσθέτουμε στον μειωτέο ταυτόχρονα προσθέτουμε και μία αντίθετη, ώστε ανά δύο αντίθετες να αλληλοαναιρούνται και έτσι να μη μεταβληθεί ο μειωτέος[6]. Στη συνέχεια διαγράφουμε από τον μειωτέο τις μπάλες που αντιστοιχούν στον αφαιρετέο και αθροίζοντας τις μπάλες που μένουν βρίσκουμε τη διαφορά. Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να βρούμε τη διαφορά:

(+3) – (–2).

Σύμφωνα με τα παραπάνω δημιουργείται το παρακάτω σχήμα:



στο οποίο φαίνεται καθαρά και ο αλγόριθμος της αφαίρεσης, δηλαδή:

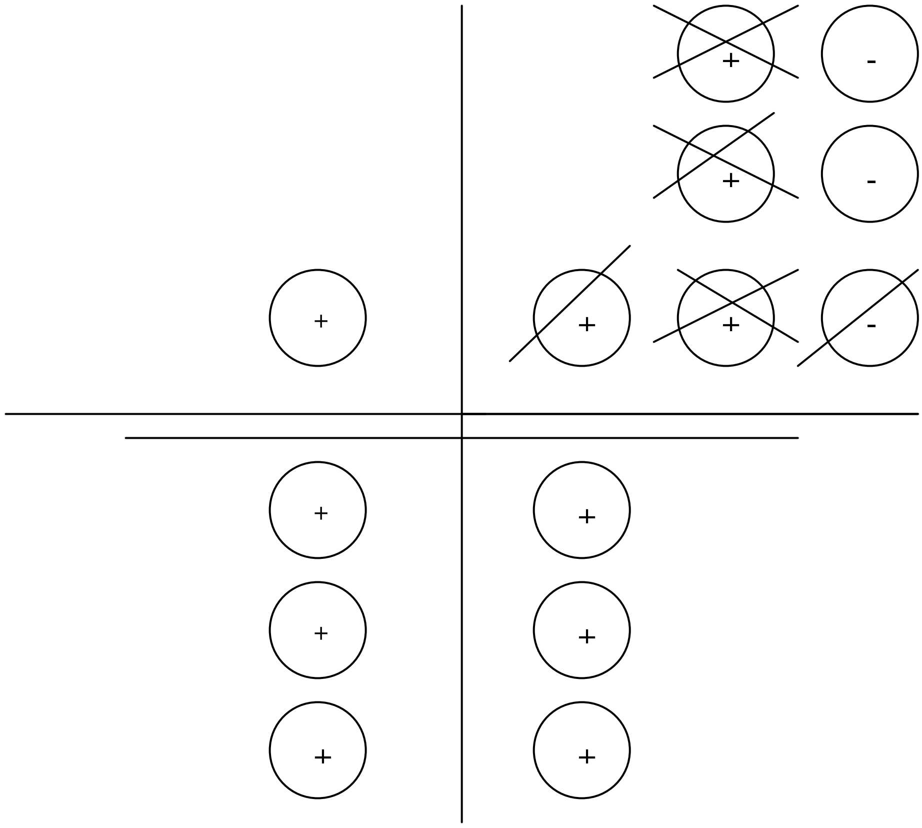
(+3) – (–2) = (+3) + (+2) = +5.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η περίπτωση όπου οι όροι της αφαίρεσης είναι ομόσημοι με τον μειωτέο να έχει την μικρότερη απόλυτη τιμή. Στην περίπτωση αυτή οι μπάλες που μένουν μετά τη διαγραφή του αφαιρετέου είναι ετερόσημες, οπότε απαιτείται και αλληλοαναίρεση, όπως στην πρόσθεση ετεροσήμων. Αυτό τονίζει περισσότερο τον αλγόριθμο της αφαίρεσης. Για παράδειγμα, έστω ότι θέλουμε να βρούμε τη διαφορά:

(+1) – (+3).

Σύμφωνα με τα παραπάνω δημιουργείται το παρακάτω σχήμα:

[6] Η όλη διαδικασία νομίζω ότι δε θα ξαφνιάσει τους μαθητές και δε θα τους εμποδίσει να κατανοήσουν αυτόν τον τρόπο της αφαίρεσης, διότι γνωρίζουν μία ανάλογη διαδικασία στον αλγόριθμο της αφαίρεσης στο σύνολο των φυσικών αριθμών και συγκεκριμένα την περίπτωση όπου ένα ψηφίο μιας τάξης μονάδων του αφαιρετέου δεν αφαιρείται από το αντίστοιχο ψηφίο του μειωτέου, οπότε δανειζόμαστε μία μονάδα από την αμέσως μεγαλύτερη τάξη μονάδων του μειωτέου κλπ.



στο οποίο φαίνεται ότι:

$$(+1) - (+3) = (+1) + (-3) = -2.$$

<u>Σημείωση</u>: Μπορούμε να δώσουμε τα παραπάνω παραδείγματα μέσα από προβλήματα, ώστε να κεντρίσουμε περισσότερο το ενδιαφέρον των μαθητών και πρόθυμα να ασχοληθούν με τη διερεύνηση του θέματος. Για παράδειγμα, για τη δεύτερη περίπτωση μπορούμε να δώσουμε το παρακάτω πρόβλημα:

«*Σε ένα παιχνίδι ερωτήσεων στον παίκτη Β αποδόθηκαν +3 βαθμοί. Όμως, διαπιστώθηκε ότι κακώς προστέθηκαν στη βαθμολογία του –2 βαθμοί. Για λόγους δικαιοσύνης λοιπόν η βαθμολογία του μαθητή αυτού πρέπει να διορθωθεί*».

Οι μαθητές εύκολα θα σκεφθούν ότι για να γίνει η διόρθωση της βαθμολογίας θα πρέπει να αφαιρεθεί ο βαθμός –2 από τη βαθμολογία του μαθητή αυτού.

Προτείνουμε λοιπόν να γίνει η αφαίρεση εποπτικά με τον συνολοθεωρητικό τρόπο, οπότε θα ακολουθήσει σχετική συζήτηση που θα έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία του παραπάνω μοντέλου.

Στο πρόβλημα αυτό οι μαθητές αντιλαμβάνονται διαισθητικά ότι η βαθμολογία του μαθητή αυτού αν αφαιρεθούν οι –2 βαθμοί θα αυξηθεί κατά 2 μονάδες και αυτό βλέπουν να γίνεται και τυπικά. Έτσι, θα κατανοήσουν καλύτερα τον αλγόριθμο της αφαίρεσης.

5. Ο ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΜΟΣ ΕΠΟΠΤΙΚΑ

5.1 Γεωμετρικός τρόπος

Ο κανόνας των προσήμων στο γινόμενο των πραγματικών αριθμών, ο οποίος σε επίπεδο θεωρίας προκύπτει από τα αξιώματα του πολλαπλασιασμού, είναι ίσως ο πιο δυσνόητος κανόνας για τους μαθητές του γυμνασίου. Αν δοθεί μόνο με την «εξ ορισμού» προσέγγιση, οι μαθητές δεν ικανοποιούνται, γιατί δεν κατανοούν τον λόγο ενός τέτοιου ορισμού! Γι' αυτό εδώ προτείνεται η «αναλογική προσέγγιση», δηλαδή ο υπολογισμός του γινομένου δύο ακεραίων αριθμών θα γίνεται με τρόπο όμοιο με αυτόν που βρίσκεται το γινόμενο δύο φυσικών αριθμών στις μικρές τάξεις του Δημοτικού. Έτσι λοιπόν θα ενεργοποιηθούν οι ρόλοι του πολλαπλασιαστή και του πολλαπλασιαστέου με τους οποίους είναι εξοικειωμένοι οι μαθητές[7]. Στο γινόμενο ακεραίων όμως παίζει ξεχωριστό ρόλο και το πρόσημο του πρώτου παράγοντα, του πολλαπλασιαστή. Συγκεκριμένα έχουμε:

Αν ο πρώτος παράγοντας είναι θετικός, τότε ο δεύτερος παράγοντας επαναλαμβάνεται προσθετικά, δηλαδή προστίθεται με τον εαυτόν του, τόσες φορές, όση είναι η απόλυτη τιμή του πρώτου, ενώ αν ο πρώτος παράγοντας είναι αρνητικός, τότε επαναλαμβάνεται όχι ο δεύτερος παράγοντας αλλά ο αντίθετός του. Στα συμπεράσματα αυτά θα οδηγηθούν μόνοι τους οι μαθητές μέσα από τη λύση απλών προβλημάτων από την καθημερινή ζωή.

Με την προσέγγιση αυτή δίνεται και μια ερμηνεία του κανόνα των προσήμων με σκοπό να τον κατανοήσουν οι μαθητές και να τον εφαρμόζουν συνειδητά.

Για την σχηματική αναπαράσταση του γινομένου δύο ακεραίων, σύμφωνα με την παραπάνω ερμηνεία, χρησιμοποιούμε ως πρότυπο το γινόμενο αριθμού με διάνυσμα, όπου στον ρόλο του αριθμού είναι ο πρώτος παράγοντας και του διανύσματος ο δεύτερος.

Για τη διδασκαλία της πράξης του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των ακεραίων μπορούμε να δώσουμε προβλήματα σαν τα παρακάτω τονίζοντας στους μαθητές ότι στα μεγέθη που χρησιμοποιούμε εμφανίζονται δύο αντίθετες καταστάσεις.

Πρόβλημα 1: *Ένας ελεύθερος επαγγελματίας που δεν έχει συνέχεια δουλειά, για κάθε μήνα που εργάζεται εισπράττει κατά μέσο όρο 2 χιλιάδες €. Αν το τελευταίο εξάμηνο εργάστηκε συνολικά 4 μήνες, να βρείτε τι οικονομική συνέπεια είχε αυτό για τον επαγγελματία.*

Είναι φανερό, ότι για να απαντήσουμε στο ερώτημα του προβλήματος, πρέπει να βρούμε το γινόμενο (+4)(+2) (συνολικός χρόνος σε μήνες επί τις απολαβές κάθε μήνα). Στο γινόμενο αυτό το πρόσημο "+" στον πρώτο παράγοντα σημαίνει ότι ο επαγγελματίας εργάστηκε αυτούς τους μήνες[8] και στον δεύτερο ότι τα χρήματα αυτά εισπράττονται από τον επαγγελματία[9].

Διαισθητικά το παραπάνω γινόμενο υπολογίζεται ως εξής:

---

[7] Για παράδειγμα, στο γινόμενο $3{\cdot}5$ οι μαθητές γνωρίζουν ότι επαναλαμβάνεται προσθετικά 3 φορές το 5, δηλαδή $3{\cdot}5 = 5 + 5 + 5 = 15$ (το 3 είναι ο πολλαπλασιαστής και το 5 ο πολλαπλασιαστέος).

[8] Για τους μήνες που εργάζεται βάζουμε το πρόσημο "+" και για τους μήνες που δεν εργάζεται το "-".

[9] Υπάρχει και η ακραία περίπτωση να εργασθεί κάποιος και να μην πληρωθεί. Αυτό δικαιολογεί τη χρήση του προσήμου.

$$(+4)(+2) = (+2) + (+2) + (+2) + (+2)$$

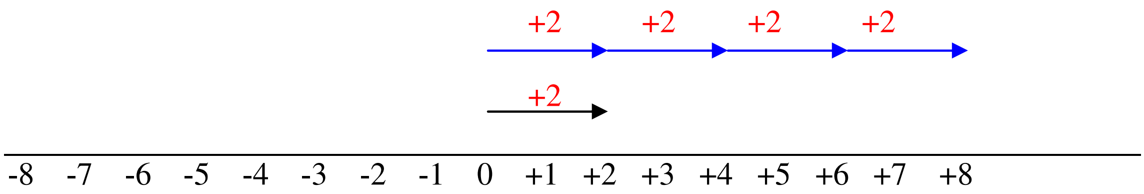
(Για κάθε μήνα που εργαζόταν εισέπραττε 2 χιλιάδες €)

$$= 4(+2)$$

$$= +8 \ = +(4\cdot 2).$$

Ο επαγγελματίας αυτός λοιπόν το τελευταίο εξάμηνο εισέπραξε από την εργασία του 8 χιλιάδες €.

Εποπτικά το παραπάνω γινόμενο μπορεί να παρασταθεί ως εξής:



{ (+4)(+2) = 4(+2) }

Με το παραπάνω παράδειγμα οι μαθητές θα παρατηρήσουν ότι το γινόμενο δύο θετικών ακεραίων είναι θετικός ακέραιος, δηλαδή “+”·“+” = “+”. Επίσης, πιστεύω πως οι μαθητές διαισθάνονται τον *ισομορφισμό* μεταξύ του συνόλου των φυσικών αριθμών και του συνόλου των θετικών ακεραίων, οπότε θα πεισθούν για το αποτέλεσμα και έτσι θα κατανοήσουν και τα επόμενα προβλήματα.

Πρόβλημα 2: *Ένας μαθητής πληρώνει κάθε μέρα που πηγαίνει στο σχολείο 2 € για εισιτήρια. Να βρείτε τι οικονομική συνέπεια έχει αυτό για τον μαθητή για μία εβδομάδα που πηγαίνει κάθε μέρα στο σχολείο.*

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα του προβλήματος είναι προφανές ότι πρέπει να υπολογίσουμε το γινόμενο (+5)(−2) (συνολικός χρόνος σε ημέρες επί το χρηματικό ποσό ανά ημέρα). Το “+” στον πρώτο παράγοντα σημαίνει ότι ο μαθητής πηγαίνει[10] στο σχολείο τις ημέρες αυτές και το “–” στον δεύτερο παράγοντα ότι ο μαθητής ξοδεύει[11] αυτά τα χρήματα.

Διαισθητικά το παραπάνω γινόμενο υπολογίζεται ως εξής:

$$(+5)(-2) = (-2) + (-2) + (-2) + (-2) + (-2)$$

(Για κάθε ημέρα που πηγαίνει στο σχολείο πληρώνει 2 € για εισιτήρια)

$$= 5(-2)$$

$$= -10 = -(5\cdot 2).$$

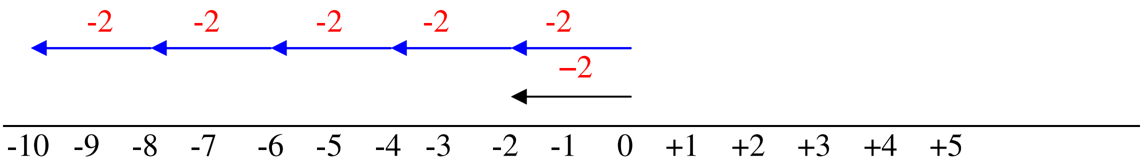
Ο μαθητής αυτός λοιπόν ξοδεύει για εισιτήρια 10 € την εβδομάδα.

Εποπτικά το παραπάνω γινόμενο μπορεί να παρασταθεί ως εξής:

---

[10] Για τις ημέρες που ο μαθητής πηγαίνει στο σχολείο βάζουμε το πρόσημο “+”, ενώ για τις ημέρες που δεν πηγαίνει το “-”.

[11] Υπάρχει και η περίπτωση να πηγαίνει ο μαθητής στο σχολείο και να μη πληρώνει εισιτήριο, το οποίο θα πληρώνεται από κάποιο φορέα. Αυτό δικαιολογεί τη χρήση του προσήμου.



$$\{\ (+5)(-2) = 5(-2)\ \}$$

Πρόβλημα 3: *Μία επιχείρηση κερδίζει κατά μέσο όρο 3 χιλιάδες € κάθε ημέρα που λειτουργεί. Αν η επιχείρηση αυτή δεν λειτούργησε 2 ημέρες λόγω απεργίας του προσωπικού, τι οικονομική συνέπεια είχε αυτό για την επιχείρηση;*

Είναι φανερό ότι η οικονομική συνέπεια για την επιχείρηση σε χιλιάδες € είναι ίση με το γινόμενο $(-2)(+3)$ (χρόνος σε ημέρες επί το ημερήσιο αποτέλεσμα). Το “–”στον πρώτο παράγοντα σημαίνει ότι η επιχείρηση δεν λειτούργησε αυτές τις ημέρες και το “+” στον δεύτερο παράγοντα ότι αυτό είναι το ημερήσιο κέρδος της επιχείρησης.

Διαισθητικά το παραπάνω γινόμενο υπολογίζεται ως εξής:

$(-2)(+3) = (-3) + (-3)$

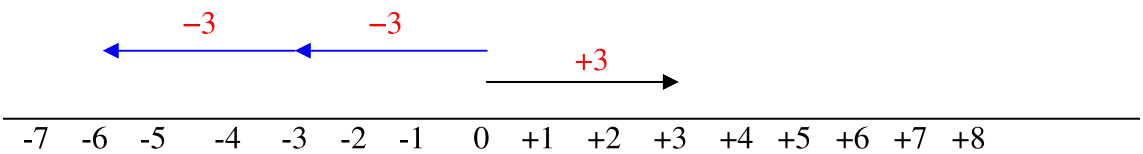
(Η επιχείρηση δεν εισέπραξε ως κέρδος 3 χιλιάδες € τη μια μέρα που δε λειτούργησε και 3 χιλιάδες την άλλη)

$= 2(-3)$

$= -6 = -(2 \cdot 3).$

Η επιχείρηση αυτή λοιπόν δεν εισέπραξε[12] 6 χιλιάδες € ως κέρδος για τις δύο ημέρες της απεργίας και αυτό θεωρείται ζημιά για την επιχείρηση. Έτσι ερμηνεύεται το αρνητικό πρόσημο στο αποτέλεσμα.

Εποπτικά το παραπάνω γινόμενο μπορεί να παρασταθεί ως εξής:



$$\{\ (-2)(+3) = 2(-3)\ \}$$

Από τα προβλήματα 2 και 3 οι μαθητές θα συμπεράνουν ότι το γινόμενο δύο ετερόσήμων ακεραίων είναι αρνητικός ακέραιος, δηλαδή “+”·“–” = “–” και “–”·“+” = “–”. Ακόμη, στο πρόβλημα 3 οι μαθητές θα παρατηρήσουν ότι όταν ο πρώτος παράγοντας είναι αρνητικός, τότε επαναλαμβάνεται ο αντίθετος του δεύτερου παράγοντα. Η παρατήρηση αυτή θα τους βοηθήσει να κατανοήσουν και το επόμενο πρόβλημα αλλά και γενικότερα τον κανόνα των προσήμων.

[12] Οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι δεν θα έχει κέρδη η επιχείρηση τις δύο ημέρες της απεργίας και παρατηρούν ότι αυτό επιβεβαιώνεται και με το αριθμητικό αποτέλεσμα. Αυτό θα τους βοηθήσει να πεισθούν για την ορθότητα της διαδικασίας.

Πρόβλημα 4: *Ένας μαθητής πληρώνει κάθε μέρα που πηγαίνει στο σχολείο 2 € για εισιτήρια. Αν δεν πήγε 3 ημέρες στο σχολείο λόγω ασθένειας, τι οικονομική συνέπεια είχε αυτό για τον μαθητή;*

Είναι προφανές, ότι η οικονομική συνέπεια για τον μαθητή για τις ημέρες αυτές είναι ίση με $(-3)(-2)$ €. (χρόνος σε ημέρες επί το χρηματικό ποσό ανά ημέρα). Το “–” στον πρώτο παράγοντα σημαίνει ότι ο μαθητής δεν πήγε στο σχολείο τις ημέρες αυτές και στον δεύτερο παράγοντα ότι αυτά τα χρήματα ξοδεύονται κάθε μέρα από τον μαθητή για εισιτήρια.

Διαισθητικά το παραπάνω γινόμενο υπολογίζεται ως εξής:

$$(-3)(-2) = (+2) + (+2) + (+2)$$

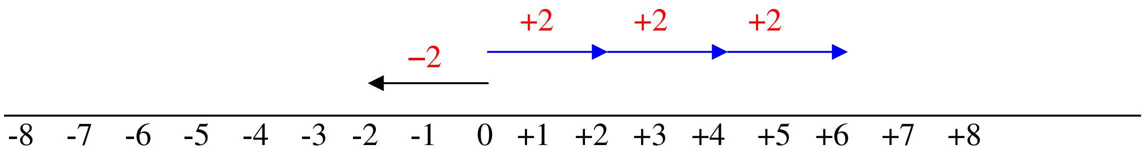
(Για κάθε ημέρα που δεν πήγε στο σχολείο ο μαθητής δεν ξόδεψε χρήματα για εισιτήρια)

$$= 3(+2)$$

$$= +6 = +(3\cdot 2).$$

Ο μαθητής αυτός λοιπόν δεν ξόδεψε[13] 6 € για εισιτήρια τις 3 ημέρες που δεν πήγε στο σχολείο και επομένως κέρδισε αυτό το ποσό. Έτσι ερμηνεύεται το πρόσημο “+” στο αποτέλεσμα.

Εποπτικά το παραπάνω γινόμενο μπορεί να παρασταθεί ως εξής:



$$\{\ (-3)(-2) = 3(+2)\ \}$$

Με τη βοήθεια του παραπάνω προβλήματος οι μαθητές θα συμπεράνουν ότι το γινόμενο δύο αρνητικών ακεραίων είναι θετικός ακέραιος, δηλαδή ότι “–”·“–” = “+”. Επίσης και στο παραπάνω πρόβλημα οι μαθητές παρατηρούν ότι όταν ο πρώτος παράγοντας είναι αρνητικός, τότε επαναλαμβάνεται ο αντίθετος του δεύτερου παράγοντα.

Τέλος, αξίζει να αναφέρουμε και μία φυσική ερμηνεία του κανόνα των προσήμων που δίνεται με το μοντέλο ενός οχήματος που κινείται πάνω σε έναν άξονα. Αν το όχημα κινείται προς τα δεξιά, η ταχύτητά του έχει θετικό πρόσημο, ενώ αν κινείται προς τα αριστερά αρνητικό. Ως αρχή μέτρησης του χρόνου θεωρείται η στιγμή κατά την οποία το όχημα διέρχεται από την αρχή του άξονα. Έτσι, πριν φτάσει το όχημα στην αρχή του άξονα ο χρόνος έχει πρόσημο “–”, ενώ όταν το προσπεράσει έχει πρόσημο “+”.

Για παράδειγμα, έστω ότι το όχημα κινείται με ταχύτητα –50 Km/h (κινείται προς τα αριστερά). Εύκολα συμπεραίνουμε ότι η θέση του οχήματος αυτού πάνω στον άξονα 3 ώρες πριν φτάσει στην αρχή του άξονα (–3 ώρες) είναι το σημείο με τετμημένη +150.

Από την Φυσική είναι γνωστό ότι η θέση ενός οχήματος που κινείται πάνω σε έναν άξονα προσδιορίζεται από το γινόμενο του χρόνου επί την ταχύτητα. Επομένως 3 ώρες

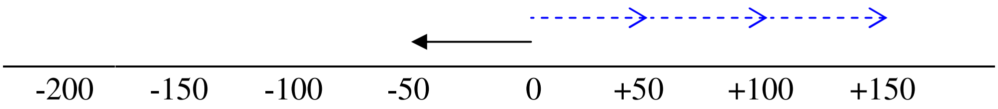
[13] Και εδώ οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι ο μαθητής δεν ξόδεψε χρήματα για εισιτήρια τις ημέρες που δεν πήγε σχολείο και παρατηρούν ότι αυτό επιβεβαιώνεται και με το αριθμητικό αποτέλεσμα. Έτσι θα πεισθούν για την ορθότητα της διαδικασίας.

πριν φτάσει το παραπάνω όχημα στην αρχή του άξονα, η θέση του δίνεται από το γινόμενο $(-3)(-50)$.

Άρα έχουμε:

$$(-3)(-50) = +150.$$

Εποπτικά**:**



$$\{\ (-3)(-50) = 3(+50) = +150\ \}$$

Με παραδείγματα σαν τα παραπάνω πιστεύω πως οι μαθητές θα βοηθηθούν να κατανοήσουν πλήρως τον κανόνα των προσήμων στο γινόμενο δύο ακεραίων αρχικά και γενικότερα στο γινόμενο δύο ρητών αριθμών.

5.2 Συνολοθεωρητικός τρόπος

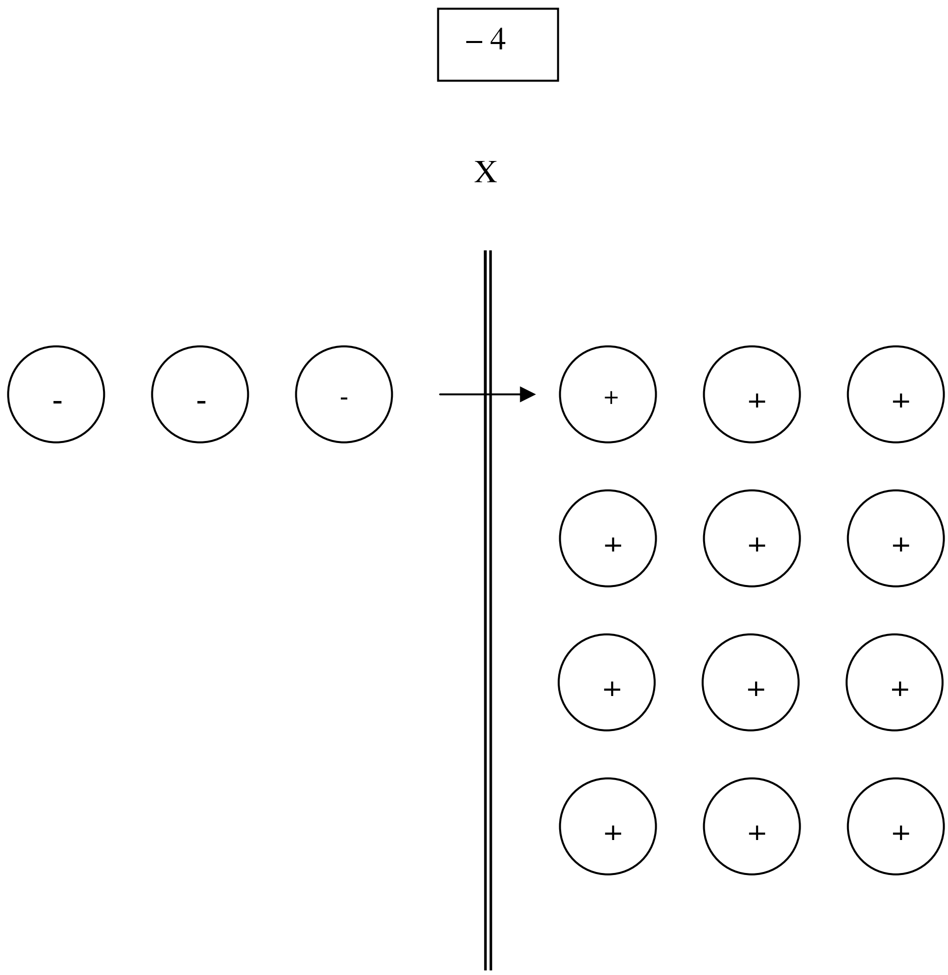
Για την οπτικοποίηση της πράξης του πολλαπλασιασμού στο σύνολο των ακεραίων αριθμών με συνολοθεωρητικό τρόπο επιλέγουμε την ορθογώνια διάταξη προσημασμένων σφαιρών. Και στο μοντέλο αυτό χρησιμοποιούμε τους διακριτούς ρόλους των δύο παραγόντων του γινομένου, δηλαδή του πολλαπλασιαστή και του πολλαπλασιαστέου. Έτσι προτείνουμε το παρακάτω σενάριο:

Σχεδιάζουμε μια κατακόρυφη γραμμή στη μέση της σελίδας του τετραδίου ή του πίνακα και πάνω από τη γραμμή σημειώνουμε το γράμμα Χ (σύμβολο της πράξης του πολλαπλασιασμού). Τα δύο μέρη που δημιουργούνται στην αντίστοιχη περιοχή θα χρησιμοποιούνται για την αναπαράσταση ακέραιων αριθμών. Στο δεξί μέρος θα αναπαριστάνονται οι θετικοί και στο αριστερό οι αρνητικοί. Αν ένας ακέραιος θα μεταφέρεται από το ένα μέρος στο άλλο, τότε θα παίρνει το πρόσημο του μέρους που θα μεταφέρεται, δηλαδή θα αλλάζει πρόσημο.

Αρχικά λοιπόν θα γράφουμε τον πρώτο παράγοντα του γινομένου που θέλουμε να υπολογίσουμε μέσα σε ένα πλαίσιο πάνω από τη γραμμή και στη συνέχεια θα αναπαριστάνουμε τον δεύτερο παράγοντα του γινομένου με μπάλες σε σειρά στο αριστερό μέρος αν είναι αρνητικός ή στο δεξί αν είναι θετικός. Το πρόσημο του πρώτου παράγοντα θα καθορίζει αν ο δεύτερος παράγοντας θα παραμένει στο μέρος του ή αν θα μεταφέρεται στο άλλο μέρος. Έτσι λοιπόν, αν ο πρώτος παράγοντας είναι θετικός, τότε ο δεύτερος θα παραμένει στο μέρος του και θα επαναλαμβάνεται σε κατακόρυφη διάταξη τόσες φορές όση είναι η απόλυτη τιμή του πρώτου παράγοντα, αν όμως ο πρώτος παράγοντας είναι αρνητικός, τότε ο δεύτερος παράγοντας θα μεταφέρεται στο άλλο μέρος, οπότε θα αλλάζει πρόσημο και θα επαναλαμβάνεται στο μέρος αυτό ο ακέραιος που προκύπτει. Το γινόμενο των δύο ακεραίων και στις δύο περιπτώσεις θα προσδιορίζεται από τις μπάλες που σχεδιάζονται συνολικά.

Μπορούμε να δώσουμε παραδείγματα για όλους τους συνδυασμούς των προσήμων όπως και στην γεωμετρική προσέγγιση. Καλό είναι να ξεκινήσουμε με ένα γινόμενο με θετικούς και τους δύο παράγοντες. Στη συνέχεια να υπολογίσουμε ένα γινόμενο με θετικό τον πρώτο παράγοντα και αρνητικό τον δεύτερο και αμέσως μετά ένα γινόμενο με αρνητικό τον πρώτο παράγοντα και θετικό τον δεύτερο και κατά προτίμηση το προηγούμενο[14] αντιμεταθέτοντας τους δύο παράγοντες. Τέλος να υπολογίσουμε ένα γινόμενο με αρνητικούς και τους δύο παράγοντες.

Για παράδειγμα, ας υπολογίσουμε το γινόμενο (–4)(–3). Αρχικά γράφουμε το –4 στο πλαίσιο που είναι πάνω από τη γραμμή και σχεδιάζουμε τρεις αρνητικές μπάλες στο αριστερό μέρος. Επειδή όμως ο πρώτος παράγοντας είναι αρνητικός οι μπάλες μεταφέρονται στο δεξί μέρος αλλάζοντας πρόσημο και επαναλαμβάνονται στο μέρος αυτό τέσσερις φορές, αφού η απόλυτη τιμή του πρώτου παράγοντα είναι ίση με 4.
Έτσι λοιπόν έχουμε το παρακάτω σχήμα:



(–4)(–3) = +12.

[14] Για παράδειγμα, αν υπολογίσουμε το γινόμενο (+3)(–5), τότε αμέσως μετά να υπολογίσουμε το γινόμενο (–5)(+3). Αυτό, για να δουν οι μαθητές ότι προκύπτει το ίδιο αποτέλεσμα, γεγονός που είναι σύμφωνο με την αντιμεταθετική ιδιότητα. Έτσι, θα πεισθούν για την ορθότητα του μοντέλου και θα κατανοήσουν ευκολότερα τον κανόνα των προσήμων.

6. ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Κλείνοντας την εργασία αυτή αναφέρουμε ότι η οπτική εποπτεία που προσφέρουν τα σχήματα που είδαμε παραπάνω βοηθά πολύ τους μαθητές όχι μόνο να κατανοήσουν και να απομνημονεύσουν τον τρόπο εκτέλεσης των πράξεων στο σύνολο των ακεραίων, αλλά και να ανακαλύψουν τους σχετικούς κανόνες. Ανακαλύπτοντας ο μαθητής έναν κανόνα και ικανοποιείται αλλά και τον θυμάται και τον εφαρμόζει καλύτερα.

Τέλος, ας έχουμε πάντα υπόψη μας ότι για την διδασκαλία των ρητών αριθμών, αλλά και οποιασδήποτε άλλης ενότητας στα Μαθηματικά, εκτός από την καλή γνώση της ενότητας, πρέπει να γνωρίζουμε και διάφορες τεχνικές διδακτικής προσέγγισης, ώστε κάθε φορά, ανάλογα με τις συνθήκες, να επιλέγουμε την πιο κατάλληλη. Προσωπικά έχω χρησιμοποιήσει μερικές από τις παραπάνω τεχνικές και παρατήρησα ότι ενεργοποιήθηκαν και συμμετείχαν και οι πιο αδύνατοι μαθητές!

7. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (Α.Π.Σ.) Φ.Ε.Κ. 303 και 304/τ. Β, 13/3/2003.

Αλιμπινίσης Α. – Αντύπας Ζ. – Ευσταθόπουλος Ε. – Κλαουδάτος Ν. – Παπασταυρίδης Σ. (2006) *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου. Βιβλίο μαθητή (προηγούμενο).* Ο.Ε.Δ.Β.

Βανδουλάκης Ι. – Καλλιγάς Χ. – Μαρκάκης Ν. – Φερεντίνος Σ. (2007) *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου. Βιβλίο μαθητή (νέο).* Ο.Ε.Δ.Β.

Βανδουλάκης Ι. – Καλλιγάς Χ. – Μαρκάκης Ν. – Φερεντίνος Σ. (2007) *Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου. Βιβλίο εκπαιδευτικού.* Ο.Ε.Δ.Β.

Γαγάτσης Αθανάσιος (1995). *Διδακτική των Μαθηματικών Θεωρία-Έρευνα.* Θεσσαλονίκη.

Εξαρχάκος Θεόδωρος (1988). *Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα.

Θεοδωρόπουλος Παναγιώτης – Γεωργιάδου-Καμπουρίδη Βαρβάρα (1987). *Ανάλυση θεμελιωδών εννοιών Άλγεβρας.* Αθήνα.

Θεοδωρόπουλος Παναγιώτης. Η ενορατική προσέγγιση σαν μέθοδος στη διδασκαλία των Μαθηματικών. *Περιοδικό «Ευκλείδης Γ΄» της Ε.Μ.Ε. τεύχος 21.*

Θεοχάρης Δημήτριος (2007, Νοέμβριος). «Ολύμπιοι – Τιτάνες» Ένα παιχνίδι σε ηλεκτρονικό υπολογιστή για τη διδασκαλία των ακεραίων αριθμών. *Πρακτικά 24ου Συνεδρίου Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, σελίδες 267 – 279,* Κοζάνη.

Τουμάσης Μπάμπης (1994). *Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα.

Τριλιανός Α. Θανάσης (1992). *Μεθοδολογία της Διδασκαλίας ΙΙ.* Αθήνα.