Αφαίρεση και Γενίκευση στα Μαθηματικά

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
www.p-theodoropoulos.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή μελετώνται οι νοητικές λειτουργίες της αφαίρεσης και της γενίκευσης στον χώρο των Μαθηματικών και εντός του πλαισίου της Διδακτικής των Μαθηματικών σχετικά με την παραγωγή και την συσχέτιση μαθηματικών εννοιών και θεωρημάτων.

1. ΑΦΑΙΡΕΣΗ

Αφαίρεση είναι η ικανότητα του ανθρώπινου μυαλού να απομονώνει τα βασικά χαρακτηριστικά ομοειδών αντικειμένων και να σχηματίζει την λογική έννοια στην οποία υπάγονται αυτά τα αντικείμενα, π.χ. δένδρο, αυτοκίνητο, παραλληλόγραμμο, κύλινδρος κλπ.

Η ταξινόμηση διαφόρων αντικειμένων σε κατηγορίες βοηθά στην καλλιέργεια της αφαίρεσης ως νοητικής διαδικασίας. Ο Ach το 1905 σχεδίασε τα πρώτα τεστ ταξινόμησης για να αποδείξει ότι όλοι οι άνθρωποι έχουν τις ίδιες ικανότητες αφαίρεσης και γενίκευσης.

Μερικές έννοιες που παράγονται με την αφαίρεση δεν γίνονται άμεσα αντιληπτές με τις αισθήσεις μας. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η αφαίρεση λειτουργεί σε δεύτερο επίπεδο και οι έννοιες που παράγονται λέγονται **αφηρημένες** έννοιες. Οι μαθηματικές έννοιες κατά κανόνα ανήκουν σ' αυτήν την κατηγορία. Ως παράδειγμα αναφέρουμε τους *φυσικούς αριθμούς* που αποτελούν το κοινό χαρακτηριστικό των ισοδύναμων πεπερασμένων συνόλων και την έννοια της *διεύθυνσης* μιας ευθείας που αποτελεί το κοινό χαρακτηριστικό των παραλλήλων ευθειών.

Σύμφωνα με την πλατωνική φιλοσοφία οι μαθηματικές έννοιες ανήκουν στο σύμπαν των αναλλοίωτων και διαχρονικών Ιδεών, αντίγραφο των οποίων είναι ο αισθητός κόσμος. Συνεπώς ο μαθηματικός ερευνητής τις συλλαμβάνει νοητικά, δηλαδή τις ανακαλύπτει, δεν τις εφευρίσκει. Κατά τον Πλάτωνα ο πραγματικός κόσμος είναι πέρα από αυτόν που γίνεται αντιληπτός με τις αισθήσεις μας και οι μαθηματικοί με την ενόραση ανακαλύπτουν αλήθειες που δεν εμπίπτουν στην αισθητηριακή μας αντίληψη.

Κατά τον Αριστοτέλη όμως και τους εμπειριστές φιλοσόφους, τα μαθηματικά αντικείμενα είναι αποτέλεσμα αφαιρετικής διαδικασίας, η οποία δεν συνεπάγεται αναγκαστικά και την ύπαρξη ενός σύμπαντος Ιδεών.

Προσεγγίζοντας διαλεκτικά το θέμα αναφέρουμε ότι μπορεί η σύλληψη μερικών μαθηματικών εννοιών να γίνεται μέσω της *ενόρασης* (intuition), η οποία εισχωρεί σε περιοχές στις οποίες είναι αδύνατη η άμεση παρατήρηση, όμως πολλές φορές βοηθιέται από την αισθητηριακή αντίληψη και γίνεται με διάμεσο την αφαίρεση. Να σημειωθεί ότι το μηδέν (0) ως αριθμός με υπόσταση που δεν ταυτίζεται με το "ουδέν[1]" άρ-

[1] Το σύμβολο του μηδενός προέρχεται από το αρχικό γράμμα της λέξης ουδέν.

γησε να επινοηθεί εξαιτίας της έλλειψης της αισθητηριακής αντίληψης του κενού συνόλου!

Για την κατανόηση των Μαθηματικών απαιτείται φαντασία και αφαιρετική ικανότητα. Γι' αυτό μερικοί μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν κάποιες μαθηματικές έννοιες. Αυτό παρατηρείται κυρίως στην Άλγεβρα, επειδή υπάρχει γενικά μια αδυναμία εποπτικής παρουσίασης των αλγεβρικών εννοιών.

Η εποπτεία ενισχύει το έργο του εκπαιδευτικού και γι' αυτό καλό είναι, όταν είναι δυνατόν, να την χρησιμοποιούμε και στην διδασκαλία των Μαθηματικών. Με την εποπτεία διεγείρεται η ενόραση και η φαντασία των μαθητών και κατανοούν τις μαθηματικές έννοιες πιο εύκολα. Να σημειωθεί, όμως, ότι οι μαθηματικές αλήθειες είναι ανεξάρτητες από την χρήση των σχημάτων και γενικά των εποπτικών μέσων. Η χρήση εποπτικών μέσων απλώς σχετίζεται με την αισθητηριακή παρατήρηση και βοηθά στην ανακάλυψη και κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

2. ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ

Γενίκευση είναι η νοητική λειτουργία, η οποία μας οδηγεί από ένα σύνολο αντικειμένων ενός γνωστικού τομέα σε ένα ευρύτερο, τα αντικείμενα του οποίου έχουν κοινά χαρακτηριστικά με τα αντικείμενα του πρώτου.

Ενώ με την αφαίρεση ο νους συγκρατεί τα βασικά γνωρίσματα των αντικειμένων αφαιρώντας τα υπόλοιπα, με την γενίκευση επεκτείνει τα χαρακτηριστικά γνωρίσματα και σχηματίζει ευρύτερες συλλογές αντικειμένων που συγκεντρώνουν αυτά τα χαρακτηριστικά. Έτσι σχηματίζονται οι γενικότερες έννοιες κάποιων εννοιών και δημιουργείται μία ιεράρχηση εννοιών, όπως π.χ. τρίγωνα-πολύγωνα-επίπεδα σχήματα κλπ.

Κατά την διδασκαλία των Μαθηματικών καλό είναι να τονίζονται οι γενικεύσεις, όπου υπάρχουν, διότι οδηγούν σε ενοποίηση γνώσεων και στην συσχέτιση διαφόρων εννοιών και θεωρημάτων με αποτέλεσμα οι μαθητές να μαθαίνουν και να απομνημονεύουν ευκολότερα τις σχετικές έννοιες και τα σχετικά θεωρήματα. Με την επισήμανση των γενικεύσεων οι μαθητές κατανοούν πώς γενικεύεται μία έννοια ή ένα θεώρημα και εξοικειώνονται με την ιδέα της γενίκευσης. Έτσι μπορούν να μεταβαίνουν πιο εύκολα από μία περίπτωση σε μία γενικότερη ή και αντίστροφα. Η κατανόηση μιας γενίκευσης προϋποθέτει την κατανόηση των στοιχείων που περιέχει και τον τρόπο με τον οποίον συνδέονται αυτά μεταξύ τους. Γι' αυτό, η αναφορά στις γενικεύσεις πολλές φορές λειτουργεί και ως ανακεφαλαίωση σε συγκεκριμένη γνωστική περιοχή.

Στα Μαθηματικά εμφανίζονται γενικεύσεις σε διάφορες μορφές, μερικές από τις οποίες θα προσπαθήσουμε να παρουσιάσουμε στη συνέχεια αναφέροντας και παραδείγματα με ιδιαίτερο διδακτικό ενδιαφέρον.

2.1 Γενίκευση μιας ιδιότητας ή μιας σχέσης

2.1.1 Το μέτρο γινομένου μιγαδικών αριθμών

Η ιδιότητα $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ του μέτρου του γινομένου δύο μιγαδικών αριθμών, η οποία αρχικά αποδεικνύεται για δύο μιγαδικούς αριθμούς γενικεύεται και αποδεικνύεται ότι ισχύει για ν ($\nu \geq 2$) μιγαδικούς αριθμούς, δηλαδή ισχύει η γενική σχέση:

$$|z_1 \cdot \ldots \cdot z_\nu| = |z_1| \cdot \ldots \cdot |z_\nu|, \ \nu \geq 2.$$

Στη συνέχεια, ως πόρισμα αυτής της γενικής ιδιότητας προκύπτει η ισότητα:

$$\left|z^{\nu}\right| = \left|z\right|^{\nu}.$$

2.1.2 Το άθροισμα των ν πρώτων περιττών φυσικών

Παρατηρώντας ότι ισχύουν οι ισότητες $1 + 3 = 4$ $(= 2^2)$ και $1 + 3 + 5 = 9$ $(= 3^2)$, δηλαδή ότι το άθροισμα των δύο και των τριων πρώτων περιττών φυσικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους των, γενικεύουμε αυτή τη σχέση για τους ν πρώτους περιττούς φυσικούς αριθμούς διατυπώνοντας την εικασία: "*Το άθροισμα των ν πρώτων περιττών φυσικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους των*".

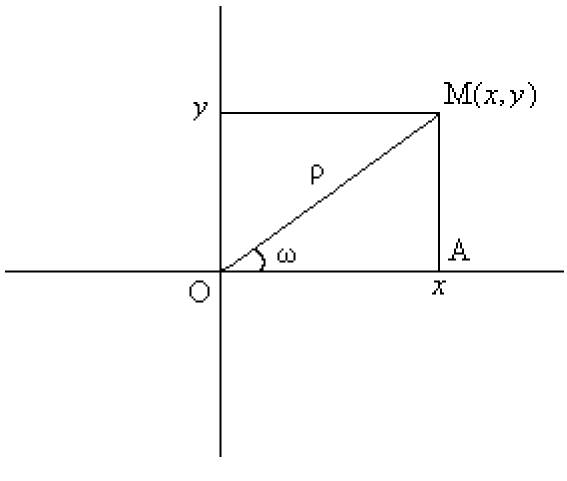
Στη συνέχεια, αποδεικνύοντας με την βοήθεια της Αρχής της Μαθηματικής Επαγωγής την εικασία αυτή προκύπτει η γενική σχέση:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2\nu - 1) = \nu^2, \;\; \nu \in IN^*.$$

2.2 Γενίκευση ενός ορισμού

Ένας ορισμός μπορεί να γενικευθεί καλύπτοντας ένα ευρύτερο σύνολο αντικειμένων. Μερικές φορές με την γενίκευση ενός ορισμού δημιουργούνται νέες έννοιες, οι οποίες μετά την λογική τους επεξεργασία εμπλουτίζουν τα Μαθηματικά με νέο υλικό.

2.2.1 Γενίκευση της έννοιας της γωνίας και τριγωνομετρικοί αριθμοί όλων των γωνιών



Οι ορισμοί των τριγωνομετρικών αριθμών των οξειών γωνιών που δίνονται με την βοήθεια ενός ορθογωνίου τριγώνου γενικεύονται με την βοήθεια του ορθοκανονικού καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων για όλες τις γωνίες του επιπέδου. Η γενίκευση αυτή, αφού συμπληρωθεί και με την γενίκευση της έννοιας της γωνίας, που γίνεται με την περιστροφή του ημιάξονα Ox, οδηγεί στην ανάπτυξη της αντίστοιχης θεωρίας.

2.2.2 Ασαφή Σύνολα

Γενικεύοντας ο Zadeh την χαρακτηριστική ή δείκτρια συνάρτηση $I_A : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ ενός συνόλου $A \subseteq \Omega$ σε μία συνάρτηση της μορφής $f : \Omega \rightarrow [0, 1]$, εισήγαγε το 1965 την έννοια των ασαφών συνόλων στο Ω όπου αναπτύχθηκε και η σχετική θεωρία.

2.3 Γενίκευση ενός θεωρήματος

Παρατηρούμε ότι η επέκταση των προϋποθέσεων κάποιων θεωρημάτων οδηγεί σε γενικότερα θεωρήματα, όπως για παράδειγμα τα θεωρήματα που αναφέρονται παρακάτω:

2.3.1 Θ.Μ.Τ. του Διαφορικού Λογισμού

Αν από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle αφαιρέσουμε την προϋπόθεση $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε οι προϋποθέσεις που απομένουν καλύπτουν περισσότερες περιπτώσεις και οδηγούν στο θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, το οποίο αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος του Rolle.

2.3.2 Νόμος των Συνημιτόνων

Επεκτείνοντας την προϋπόθεση της ορθής γωνίας του Πυθαγορείου Θεωρήματος σε οποιαδήποτε γωνία ενός τριγώνου οδηγούμαστε αρχικά στα ειδικά θεωρήματα της οξείας και της αμβλείας γωνίας και τελικά στο Νόμο των συνημιτόνων, ο οποίος αποτελεί την γενική (ενιαία) διατύπωση των τριων θεωρημάτων.

2.3.3 Θεώρημα Stewart

Το Θεώρημα Stewart, το οποίο στο σχολικό βιβλίο της Γεωμετρίας Α΄ και Β΄ Λυκείου περιέχεται στις Γενικές Ασκήσεις του 9^{ου} κεφαλαίου, αποτελεί γενίκευση του 1^{ου} θεωρήματος των διαμέσων. Στο θεώρημα Stewart ως βασικά σημεία των πλευρών ενός τριγώνου δεν λαμβάνονται μόνο τα μέσα τους όπως στο 1^{ο} θεώρημα των διαμέσων, αλλά όλα τους τα σημεία. Η απόδειξη του θεωρήματος Stewart είναι εύκολη και θεωρώ πως καλό είναι να διδάσκεται στους μαθητές για να εξοικειώνονται οι μαθητές με την διαδικασία των γενικεύσεων στα Μαθηματικά, αλλά και για να κατανοούν τη σημασία των γενικεύσεων.

2.4 Γενίκευση μιας συνθήκης

2.4.1 Υπερβολή – Μεσοκάθετος

Ως γνωστόν η υπερβολή με εστίες δύο διακεκριμένα σημεία Α και Β ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεών τους από τα δύο σταθερά σημεία Α και Β είναι ένας σταθερός θετικός αριθμός μικρότερος του μήκους του ΑΒ, δηλαδή για κάθε σημείο Μ αυτού του γεωμετρικού τόπου ισχύει:

$$|(MA) - (MB)| = c$$

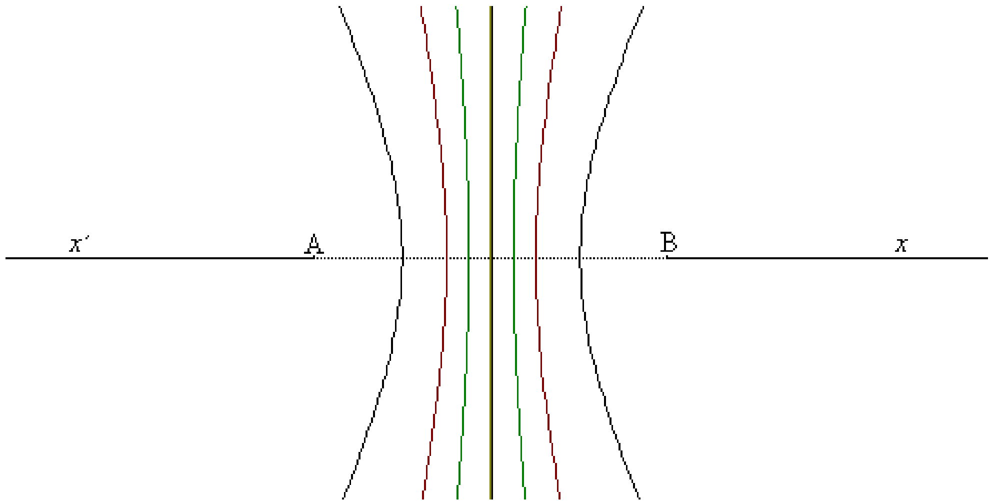
όπου c σταθερός αριθμός για τον οποίο ισχύει: $0 < c < (AB)$.

Αν γενικεύσουμε την παραπάνω συνθήκη διατηρώντας σταθερά τα σημεία Α και Β, ώστε:

$$0 \le |(MA) - (MB)| \le (AB),$$

τότε για τις διάφορες τιμές της παράστασης |(ΜΑ) – (ΜΒ)| εκτός από τις υπερβολές με εστίες τα σημεία Α και Β, όπως φαίνεται και στο επόμενο σχήμα, παίρνουμε και την μεσοκάθετο του ΑΒ καθώς και τις ημιευθείες Αx' και Βx μαζί.

Αναφέροντας αυτήν την απλή παρατήρηση στους μαθητές τους προσφέρουμε μια πιο ολοκληρωμένη γνώση συνδέοντας και την έννοια της υπερβολής με την έννοια της μεσοκαθέτου.



2.5 Γενικές εκφράσεις

2.5.1 Γενική εξίσωση ευθείας

Η εξίσωση Αx + Βy + Γ = 0 με |Α| + |Β| ≠ 0 αποτελεί την γενική εξίσωση ευθείας καλύπτοντας και τις δύο περιπτώσεις ευθειών, δηλαδή τις ευθείες για τις οποίες ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης με εξίσωση της μορφής $y = \lambda x + \beta$ και τις κατακόρυφες ευθείες με εξίσωση της μορφής $x = x_o$ για τις οποίες δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης.

2.5.2 «Γενική» πρόοδος - Ο σταθμικός μέσος

Γενικεύοντας την αριθμητική και την γεωμετρική πρόοδο μαζί παίρνουμε τις ακολουθίες με αναδρομικό τύπο της μορφής $\alpha_{\nu+1} = \lambda\alpha_\nu + \omega$. Οι ακολουθίες με γενικό όρο $\alpha_\nu = \alpha\lambda^\nu + \beta$ με $\alpha\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$ ανήκουν σ' αυτήν την κατηγορία.

Επίσης, αποδεικνύεται ότι ο σταθμικός μέσος είναι ο γενικός μέσος, δηλαδή οι άλλοι μέσοι, όπως π.χ. ο γεωμετρικός και ο αρμονικός είναι ειδικές περιπτώσεις του σταθμικού μέσου.
Δείτε σχετική εργασία μου στην διεύθυνση:

http://www.p-theodoropoulos.gr/ergasies/mathimat-proodos.pdf

2.6 Γενικοί ορισμοί

Μερικές φορές είναι δυνατόν να δοθούν γενικοί ορισμοί οι οποίοι καλύπτουν συναφείς έννοιες. Με τον τρόπο αυτόν οι μαθητές αποκτούν μια ολική αντίληψη για τις έννοιες αυτές και μπορούν να τις συγκρίνουν και να τις συνδέουν μεταξύ τους με αποτέλεσμα να τις εμπεδώνουν καλύτερα.

2.6.1 Ο ορισμός του ορίου

Για τον ορισμό του ορίου $\lim\limits_{x\to X_0} f(x) = L$, όπου $X_0, L \in \overline{IR} = IR \cup \{-\infty,\ +\infty\}$ μιας συνάρτησης f μπορεί να δοθεί ο επόμενος γενικός ορισμός:

Ορισμός: Λέμε *ότι η συνάρτησης f έχει όριο το L όταν το x τείνει στο X_0 (συμβολικά $\lim\limits_{x\to X_0} f(x) = L$) αν για κάθε περιοχή περ(L) του L, υπάρχει περιοχή περ(X_0) του X_0 τέτοια ώστε για κάθε $x \in$ περ(X_0)-{ X_0 } με $x \in D_f$ να ισχύει $f(x) \in$ περ(L).*

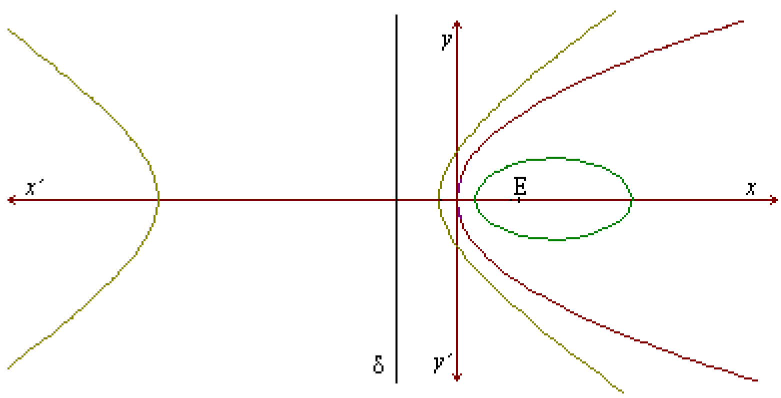
Ερμηνεύοντας για όλες τις περιπτώσεις των X_0 και L τον παραπάνω ορισμό προκύπτουν οι γνωστοί ορισμοί για τις αντίστοιχες περιπτώσεις των ορίων μιας συνάρτησης με μία μεταβλητή.

2.6.2 Κωνικές τομές

Αξιοποιώντας την εφαρμογή[2] 2 της § 3.3, σελ. 110 του σχολικού βιβλίου των Μαθηματικών της Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου μπορούμε να δώσουμε έναν ενιαίο ορισμό για τις μη τετριμμένες[3] κωνικές τομές (έλλειψη, παραβολή, υπερβολή), που είναι ο ορισμός που ακολουθεί:

Ορισμός: *Έστω δ μία ευθεία ενός επιπέδου και Ε ένα σημείο του ίδιου επιπέδου το οποίο δεν ανήκει στην ευθεία δ. Ονομάζουμε (μη τετριμμένη) κωνική τομή τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου αυτού των οποίων ο λόγος της απόστασής τους από το σημείο Ε προς την απόστασή τους από την ευθεία δ είναι ένας σταθερός θετικός αριθμός, έστω ε. Πιο συγκεκριμένα: Αν ε < 1 η κωνική τομή λέγεται έλλειψη, αν ε = 1 παραβολή και αν ε > 1 υπερβολή. Η ευθεία δ λέγεται διευθετούσα, το σημείο Ε εστία και ο σταθερός λόγος ε εκκεντρότητα της κωνικής τομής.*

Χαρακτηριστικό είναι το παρακάτω σχήμα στο οποίο χρησιμοποιούμε την ίδια εστία (Ε) και την ίδια διευθετούσα (δ) και για τις τρεις κωνικές τομές. Για την έλλειψη έχουμε πάρει $\varepsilon = \frac{1}{2}$ και για την υπερβολή $\varepsilon = \frac{3}{2}$.



[2] Υπάρχει και αντίστοιχη απόδειξη για την υπερβολή.
[3] Γενικά κωνική τομή ονομάζεται το σχήμα των κοινών σημείων ενός επιπέδου με τις κυρτές επιφάνειες δύο ορθών κώνων απείρου ύψους, που εφάπτονται στις κορυφές τους, οι άξονες τους έχουν κοινό φορέα και κάθε γενέτειρα του ενός είναι αντικείμενη ημιευθεία μιας γενέτειρας του άλλου. Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό μία κωνική τομή μπορεί είναι: σημείο, δύο ευθείες, κύκλος (τετριμμένες), έλλειψη, παραβολή ή υπερβολή (μη τετριμμένες).

2.7 Γενικές ιδιότητες – Γενικές συνθήκες

2.7.1 Το τετράγωνο του μέτρου ενός μιγαδικού

Για το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού, που όπως γνωρίζουμε αποτελεί την γενίκευση της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού, ισχύει η σχέση $|z|^2 = z\bar{z}$. Κατά την διδασκαλία της ιδιότητας αυτής των Μιγαδικών αριθμών καλό είναι να τονίζεται ότι η σχέση αυτή είναι γενική και καλύπτει και την γνωστή ιδιότητα $|x|^2 = x^2$ της απόλυτης τιμής των πραγματικών αριθμών, αφού για κάθε $x \in IR$ ισχύει $\bar{x} = x,$ οπότε ισχύει:

$$|x|^2 = x\bar{x} = xx = x^2 .$$

2.7.2 Μοναδική λύση ενός γραμμικού συστήματος *ν*x*ν*.

Η γενική συνθήκη για να έχει μοναδική λύση ένα γραμμικό σύστημα ν εξισώσεων με ν αγνώστους, το οποίο υπό μορφή πινάκων γράφεται ως $AX = B$, δεν είναι ο πίνακας A να είναι μη μηδενικός που μπορεί εύκολα να υποθέσει κανείς παρασυρόμενος από την αντίστοιχη συνθήκη $\alpha \neq 0$, η οποία ισχύει για την γραμμική εξίσωση $\alpha x=\beta$ με έναν άγνωστο, αλλά η ορίζουσα $\det(A)$ του A να είναι διάφορη του μηδενός. Να σημειωθεί ότι η συνθήκη $\det(A) \neq 0$ είναι γενική και καλύπτει και την περίπτωση της γραμμικής εξίσωσης με έναν άγνωστο, διότι θεωρώντας έναν πραγματικό αριθμό α ως πίνακα (πίνακας στοιχείο) έχουμε $\det(\alpha) = \alpha$.

2.8 Γενίκευση μιας άσκησης ή ενός προβλήματος

Ως παράδειγμα γενίκευσης μιας άσκησης αναφέρουμε την άσκηση 5 της Β΄ ομάδας της πρώτης παραγράφου του κεφαλαίου των Πραγματικών Αριθμών του βιβλίου της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου.

Αρχικά εξετάζουμε μήπως μπορεί η άσκηση να γενικευθεί για όλες τις πράξεις (στο σχολικό βιβλίο αναφέρονται μόνο η διαίρεση και η αφαίρεση) όπου προκύπτει εύκολα ότι ισχύει. Έτσι λοιπόν η άσκηση αυτή μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

Έστω α, β και γ τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

i) *Αν* $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{\beta}{\gamma} = \dfrac{\gamma}{\alpha}$

ii) *Αν* $\alpha - \beta = \beta - \gamma = \gamma - \alpha.$

iii) *Αν* $\alpha\beta = \beta\gamma = \gamma\alpha.$

iv) *Αν* $\alpha + \beta = \beta + \gamma = \gamma + \alpha.$

Στη συνέχεια εξετάζουμε αν μπορεί να γενικευθεί η άσκηση για όλα τα πολύγωνα και όχι μόνο για τρίγωνα και καταλήγουμε στα παρακάτω συμπεράσματα.

1. Αν διατηρήσουμε τις 4 πράξεις, τότε γενικεύεται για όλα τα πολύγωνα με περιττό πλήθος πλευρών.

2. Αν περιοριστούμε στις δύο πράξεις που αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο, τότε γενικεύεται για όλα τα πολύγωνα.

Να σημειωθεί ότι ένα ισόπλευρο πολύγωνο δεν είναι αναγκαία και κανονικό. Μόνο το ισόπλευρο τρίγωνο είναι και κανονικό.

3. ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Πιστεύω πως έγινε φανερό ότι οι αφαιρέσεις και οι γενικεύσεις αποτελούν κύρια μορφή μάθησης στα Μαθηματικά. Γι' αυτό λοιπόν καλό είναι, όσο είναι εφικτό, οι νέες έννοιες να παρουσιάζονται στους μαθητές με πολλαπλό τρόπο και οι γενικεύσεις να επισημαίνονται κατά την διδασκαλία, ώστε οι μαθητές να μπορούν να συσχετίζουν και να συνδέουν παρεμφερείς έννοιες και συναφή θεωρήματα. Έτσι θα επιτυγχάνεται πιο ολοκληρωμένη μάθηση, αλλά και καλύτερη λειτουργία της μακροπρόθεσμης μνήμης. Να σημειωθεί ότι όσο πιο οργανωμένες και σημασιολογικά συνδεδεμένες είναι οι γνώσεις που αποθηκεύονται στην μακρόχρονη μνήμη, τόσο πιο εύκολα ανασύρονται και χρησιμοποιούνται από τους μαθητές.

4. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] **Αναπολιτάνος Α. Διονύσιος:** *Εισαγωγή στη φιλοσοφία των Μαθηματικών.* Αθήνα 1985.

[2] **Εγκυκλοπαίδεια Υδρία.**

[3] **Λούρια Ρ. Α.:** *Γνωστική Ανάπτυξη.* Αθήνα 1995.

[4] **Ματσαγγούρας Γ. Ηλίας:** *Στρατηγικές Διδασκαλίας.* Αθήνα 2003.