Τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f και της αντίστροφής της f^{-1}

Αξιότιμοι κύριοι συνάδελφοι,

Με αφορμή το βιβλίο του κ. Ανδρέα Πετράκη και τα δημοσιεύματα των κ. κ. Αντ. Κυριακόπουλου και Ν. Φωτιάδη στο περιοδικό «Ευκλείδης Β΄» τ. 69 σχετικά με τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f και της αντίστροφής της f^{-1}, επιτρέψτε μου να εκφράσω την άποψή μου ελπίζοντας πως θα συμβάλλω και εγώ με τον τρόπο μου στη διαλεύκανση της υπόθεσης. Είμαι Σχολικός Σύμβουλος Αρκαδίας και Λακωνίας και η πρώτη φορά που ήλθα σε επαφή με το θέμα ήταν όταν μου ετέθη από τους συναδέλφους μεγάλου λυκείου της περιοχής ευθύνης μου.

Αρχικά λοιπόν πρέπει να λεχθεί ότι δε μπορούμε γενικά να βρούμε τα κοινά σημεία δύο γραμμών, όταν αυτές εκφράζονται διανυσματικά ή ισοδύναμα με παραμετρικές εξισώσεις με την ίδια παράμετρο. Για παράδειγμα, αν για τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x)=\sqrt{1-x},\ x\le 1 \quad \text{και} \quad f^{-1}(x)=1-x^2,\ \ x\ge 0,$$

που χρησιμοποιούν και οι προαναφερθέντες, πάρουμε ως παραμετρικές εξισώσεις τις

$$\left(t,\ \sqrt{1-t}\right) \quad \text{και} \quad \left(1-t,\ 2t-t^2\right) \ \text{ με } \ t\le 1$$

αντίστοιχα, αφού ως γνωστόν μία γραμμή μπορεί να εκφράζεται με περισσότερες από μία παραμετρικές εξισώσεις, τότε αποδεικνύεται ότι οι γραφικές παραστάσεις των παραπάνω συναρτήσεων δεν έχουν κοινά σημεία (!), αφού το σύστημα:

$$\begin{cases} t=1-t \\ \sqrt{1-t}=2t-t^2 \end{cases}$$

είναι αδύνατο.

Ας δούμε και ένα άλλο παράδειγμα, το οποίο δεν αναφέρεται σε αντίστροφες συναρτήσεις. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x)=2x+2 \quad \text{και} \quad g(x)=x^3-x,\ \ x\in IR,$$

όπως αποδεικνύεται, έχουν δύο κοινά σημεία, τα Α(-1,0) και Β(2,6). Αν πάρουμε όμως ως παραμετρικές εξισώσεις των C_f και C_g τις

$$\left(t,\ 2t+2\right) \ \text{ και } \ \left(2-t,\ -t^3+6t^2-11t+6\right),\ \ t\in IR$$

αντίστοιχα, τότε προκύπτει ότι δεν έχουν κοινά σημεία, αφού το σύστημα:

$$\begin{cases} t = 2 - t \\ 2t + 2 = -t^3 + 6t^2 - 11t + 6 \end{cases}$$

είναι αδύνατο.

Πρέπει λοιπόν να αναφερθεί ότι, όταν οι συντεταγμένες των σημείων δύο γραμμών εκφράζονται παραμετρικά με την ίδια παράμετρο, τότε υπάρχει μια αντιστοίχιση μεταξύ των σημείων της μιας με τα σημεία της άλλης και πως αναζητώντας με αυτόν τον τρόπο τα κοινά σημεία των δύο γραμμών απλά αναζητούμε την περίπτωση που τα δύο αντίστοιχα σημεία ταυτίζονται. Αυτός ο τρόπος αντιμετώπισης είναι καθαρά σημειακός.

Ο κ. Πετράκης αντιμετωπίζοντας το θέμα σημειακά και παίρνοντας σκόπιμα για τις C_f και $C_{f^{-1}}$ ως παραμετρικές εξισώσεις τις

$$\left(t,\ \sqrt{1-t}\right) \text{ και } (\sqrt{1-t},\ t),\quad t \le 1$$

όπου στη δεύτερη φαίνεται καθαρά ο λειτουργικός ρόλος της αντίστροφης, αναζητεί στην ουσία να βρει πότε τα αντίστοιχα σημεία ταυτίζονται και όχι πού τέμνονται οι δύο καμπύλες. Με αυτή την αντιμετώπιση είναι φυσικό δύο αντίστοιχα σημεία να μην ταυτίζονται παρά μόνο αν βρίσκονται πάνω στον άξονα συμμετρίας των δύο γραφικών παραστάσεων, που είναι η ευθεία με εξίσωση $y = x$.

Οι κ. κ. Κυριακόπουλος και Φωτιάδης αντίθετα αντιμετωπίζοντας το θέμα ολιστικά αναζητούν τιμές t_1 και t_2 για την παράμετρο t ώστε να ισχύει:

$$\begin{cases} t_1 = \sqrt{1-t_2} \\ \sqrt{1-t_1} = t_2 \end{cases}$$

θεωρώντας τις ίδιες παραμετρικές εξισώσεις για τις δύο καμπύλες που χρησιμοποιεί και ο κ. Πετράκης.

Νομίζω, όμως, πως δεν είναι σωστός αυτός ο τρόπος αντιμετώπισης, γιατί, αφού και οι δύο καμπύλες εκφράζονται με την ίδια παράμετρο t, θα πρέπει η παράμετρος t να παίρνει την ίδια τιμή και για τις δύο γραμμές. Αν θέλουμε να αντιμετωπίσουμε το θέμα ολιστικά πρέπει να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικές παραμέτρους για τις δύο γραμμές π.χ. t και ω.

Ας δούμε τώρα το θέμα πρακτικά και ας υποθέσουμε ότι πάνω στις δύο γραμμές κινούνται δύο κινητά που η θέση τους καθορίζεται με παραμετρικό τρόπο. Με το σημειακό τρόπο αντιμετώπισης (ίδια παράμετρος) αναζητούμε τη στιγμή που τα κινητά συναντιούνται, ενώ με τον ολιστικό (διαφορετικές παράμετροι) αναζητούμε τα κοινά σημεία των τροχιών τους.

Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι: Πώς πρέπει να αντιμετωπίζουμε τις γραφικές παραστάσεις των C_f και $C_{f^{-1}}$ σημειακά ή ολιστικά; Την απάντηση νομίζω την παίρνουμε από την ίδια την ερώτηση. Τι αναζητούμε; Τα κοινά σημεία των δύο γραφικών παραστάσεων. Αυτό σημαίνει ότι τις αντιμετωπίζουμε ολιστικά, σαν γραμμές και επομένως τα κοινά τους σημεία δεν είναι μόνο πάνω στην $y = x$, αλλά κάθε λύση του συστήματος:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = f^{-1}(x) \end{cases}, \quad x \in D_f \cap D_{f^{-1}}.$$

Σ' αυτό συνηγορεί και ο σύγχρονος ορισμός της έννοιας της συνάρτησης (υποσύνολο καρτεσιανού γινομένου...). Γενικά μπορούμε να πούμε ότι, αν τα ζεύγη (*α*, *β*) και (*β*, *α*) ανήκουν στο γράφημα μιας αντιστρέψιμης συνάρτησης f, τότε αυτά τα ζεύγη ανήκουν και στο γράφημα της αντίστροφής της, οπότε τα αντίστοιχα σημεία θα ανήκουν και στις δύο γραφικές παραστάσεις. Μήπως δεν ισχύει άλλωστε στην περίπτωση αυτή ότι $f(a) = b$ και $f^{-1}(a) = b$ καθώς και $f(b) = a$ και $f^{-1}(b) = a$;

Να συμπληρώσουμε επίσης, ότι ο λειτουργικός ρόλος της αντίστροφης δεν αναιρείται με την ολιστική αντιμετώπιση και αυτό φαίνεται από το πεδίο ορισμού της f^{-1}. Για παράδειγμα, ενώ η παράσταση $g(x) = 1 - x^2$ ορίζεται σε όλο το *IR*, για τον ορισμό της όμως ως αντίστροφης της $f(x) = \sqrt{1-x}$, $x \le 1$ πρέπει να θέσουμε τον περιορισμό $x \ge 0$.

Τέλος, θέλω να πιστεύω ότι το παραπάνω ζήτημα δε συγχέεται με την ισοδυναμία:

$$f(x) = x \iff f^{-1}(x) = x, \quad x \in D_f \cap D_{f^{-1}},$$

η οποία αναφέρεται μόνο στα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y = x$ και προφανώς ισχύει.

Με τιμή

Δρ. Παναγιώτης Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03

<u>Σημείωση</u>: Η επιστολή αυτή είναι αναρτημένη στην ιστοσελίδα του παραρτήματος της Ε.Μ.Ε. του νομού Ροδόπης www.apeironews.blogspot.com