Η ασάφεια και τα Ασαφή Σύνολα

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος κλάδου ΠΕ03
www.p-theodoropoulos.gr

Εισαγωγή

Η έννοια του **ασαφούς** συνόλου εισήχθη από τον Zadeh το 1965 και δημιούργησε πραγματική επανάσταση στο χώρο των Μαθηματικών, διότι ελευθέρωσε το πνεύμα από την καντοριανή αντίληψη. Γρήγορα εκδηλώθηκε έντονο ερευνητικό ενδιαφέρον από μαθηματικούς επιστήμονες και έτσι νέες έννοιες με πολλές εφαρμογές άρχισαν να εισάγονται στα Μαθηματικά, όπως: Ασαφή Σύνολα (Fuzzy Sets), Ασαφής Λογική (Fuzzy Logic), Πλειότιμες Λογικές (Many Valued Logics) κλπ.

Η ασάφεια και η αοριστία απέκτησαν μαθηματική δομή!
Το φράγμα του 0-1 και της δίτιμης Λογικής έσπασε!

Ασαφή Σύνολα

Η βασική ιδέα για τον ορισμό των ασαφών συνόλων από τον Zadeh ήταν η γενίκευση της χαρακτηριστικής ή δείκτριας συνάρτησης ενός συνόλου A. Ως γνωστόν, κάθε υποσύνολο A ενός κλασικού (μη ασαφούς) συνόλου X μπορεί να ταυτιστεί[1] με την χαρακτηριστική του συνάρτηση $I_A: X \to \{0, 1\}$, διότι, αν ορίσουμε το σύνολο:

$$\{0,1\}^X := \left\{ f \,/\, f : X \to \{0,1\} \right\}$$

τότε η δομή:

$$P(X) = \left\langle P(X),\ \cup,\ \cap,\ ^c,\ \varnothing,\ X \right\rangle$$

είναι ισόμορφη με την δομή:

$$I(X) = \left\langle \{0,1\}^X,\ \max,\ \min,\ \neg,\ 0,\ 1 \right\rangle$$

[1] Συνεπώς ένα σύνολο A μπορεί να οριστεί και από την χαρακτηριστική του συνάρτηση.

όπου max και min είναι η επέκταση των αντίστοιχων διμελών πράξεων του {0,1} στο σύνολο των συναρτήσεων και η μονομελής πράξη ¬ ορίζεται ως εξής: $\neg f := 1 - f$. Με 0 και 1 στη δομή $I(X)$ και σ' αυτές που ακολουθούν συμβολίζουμε τις αντίστοιχες σταθερές συναρτήσεις ελπίζοντας πως δεν δημιουργείται σύγχυση. Η τιμή της χαρακτηριστικής συνάρτησης ενός υποσυνόλου A του X για κάθε $x \in X$ εκφράζει τον βαθμό (0 ή 1) με τον οποίον το στοιχείο x ανήκει στο σύνολο A.

Γενικεύοντας τώρα, ορίζουμε ως **ασαφές σύνολο** *σε ένα γενικό σύνολο, σύμπαν (universe) X* κάθε συνάρτηση:

$$f \;:\; X \rightarrow [0, 1].$$

Παρατηρούμε ότι οι τιμές της συνάρτησης f (membership function) του ασαφούς συνόλου[2] f ανήκουν στο σύνολο [0, 1] και συγκρίνοντας με τις τιμές των χαρακτηριστικών συναρτήσεων συμπεραίνουμε ότι η τιμή $f(x)$ για κάθε $x \in X$ δηλώνει τον βαθμό με τον οποίον το στοιχείο x ανήκει στο ασαφές σύνολο f. Αν για κάποιο $x \in X$ ισχύει $f(x) = 0$, τότε το x δεν ανήκει στο ασαφές σύνολο f, αν $f(x) = 1$ τότε ανήκει και αν $0 < f(x) < 1$, τότε δεν είναι ξεκάθαρο αν το x ανήκει ή δεν ανήκει στο f και αυτό δικαιολογεί τον όρο "*ασαφές σύνολο"*.

Οι πράξεις μεταξύ των ασαφών συνόλων ορίζονται με την βοήθεια αντίστοιχων διμελών πράξεων που ορίζονται στο διάστημα [0, 1] και επεκτείνονται στο σύνολο των συναρτήσεων, όπως ακριβώς και στην δομή $I(X)$. Πιο συγκεκριμένα, για τον ορισμό της πράξης της "τομής" μεταξύ ασαφών συνόλων χρησιμοποιείται μία συνάρτηση (διμελής πράξη στο [0, 1]):

$$T \;:\; [0, 1]^2 \;\rightarrow\; [0, 1]$$

που ικανοποιεί τις σχέσεις:

1. $T(x,1) = x,\ \forall x \in [0,1]$
2. $T(x, y) = T(y, x),\ \forall x, y \in [0,1]$
3. $T(x, y) \le T(z, w),\ \forall x, y, z, w \in [0,1]$ με $x \le z$ και $y \le w$
4. $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z),\ \forall x, y, z \in [0,1]$.

Μία τέτοια συνάρτηση T λέγεται *t-norm*. Π.χ. η συνάρτηση $T(x, y) = xy$ *είναι t-norm*. Ο περιορισμός όλων των *t-norms* στο σύνολο $\{0, 1\}^2$ είναι η συνάρτηση min.

Σε κάθε *t-norm* αντιστοιχεί μία συνάρτηση S, η οποία ορίζεται από την σχέση:

$$S(x, y) := 1 - T(1-x, 1-y)$$

και λέγεται *t-conorm*. Ο περιορισμός των *t-conorms* στο σύνολο $\{0, 1\}^2$ είναι η συνάρτηση max. Για τον ορισμό της πράξης της "ένωσης" μεταξύ δύο ασαφών συνόλων που αντιστοιχεί σε μία "τομή" χρησιμοποιείται η αντίστοιχη *t-conorm*.

[2] Κάθε ασαφές σύνολο ταυτίζεται με την αντίστοιχη συνάρτηση.

Τελικά οδηγούμαστε στην δομή:

$$F(X) := \left\langle [0,1]^X,\ S,\ T,\ \neg,\ 0,\ 1 \right\rangle$$

όπου S και T η επέκταση των αντίστοιχων πράξεων στο σύνολο $[0, 1]^X$, που είναι η δομή των ασαφών συνόλων στο X.

Είναι ευνόητο ότι μπορούμε να ορίσουμε τόσες "τομές" και "ενώσεις" μεταξύ των ασαφών συνόλων όσες είναι οι *t-norms* και οι αντίστοιχες *t-conorms*. Πράγματι στην θεωρία ασαφών συνόλων βλέπουμε να ορίζονται πολλές τέτοιες πράξεις με ιδιαίτερη ονομασία η καθεμία. Σημειώνεται δε ότι ο περιορισμός όλων των "τομών" των ασαφών συνόλων στα κλασικά (καντοριανά) σύνολα είναι η γνωστή πράξη της τομής μεταξύ των κλασικών συνόλων και ο περιορισμός όλων των "ενώσεων" των ασαφών συνόλων στα κλασικά σύνολα είναι η γνωστή πράξη της ένωσης μεταξύ των κλασικών συνόλων και αυτό δικαιολογεί ότι η δομή των ασαφών συνόλων αποτελεί γενίκευση της δομής των κλασικών συνόλων.

IB – ασάφεια

Ο καθηγητής του Πανεπιστημίου Πατρών Δρόσος Κωνσταντίνος, στην ερευνητική ομάδα του οποίου έχω την τιμή να ανήκω και εγώ, είχε την ιδέα πως η μετάβαση από τα κλασικά μοντέλα της συνολοθεωρίας στα μη-συμβατικά θα εισήγαγε στην ουσία και μη-κλασικά αντικείμενα που η λογική τους θα ήταν πλειότιμη. Έτσι λοιπόν η ασάφεια θα μπορούσε να εκφρασθεί καλύτερα με την βοήθεια της μη-συμβατικής θεωρίας και της θεωρίας των μοντέλων του Boole σύμφωνα με την παρακάτω βασική ιδέα.

Παραπάνω είδαμε ότι η δομή $I(X)$, που στηρίζεται στο σύνολο $\{0, 1\}$ εφοδιασμένο με τις αλγεβρικές πράξεις max, min και $\neg$ είναι ισόμορφη με την δομή $P(X)$. Αν δούμε όμως το σύνολο $\{0, 1\}$ ως την τετριμμένη άλγεβρα Boole $2 = \{0, 1\}$με τις γνωστές πράξεις $\vee$, $\wedge$ και $\neg$ και ορίσουμε την δομή:

$$2(X) = \left\langle \{0,1\}^X,\ \vee,\ \wedge,\ \neg,\ 0,\ 1 \right\rangle$$

όπου $\vee$ και $\wedge$ είναι η επέκταση των αντίστοιχων πράξεων της τετριμμένης άλγεβρας Boole στο σύνολο $\{0, 1\}^X$ και η πράξη $\neg$ όπως ορίστηκε προηγουμένως, τότε αποδεικνύεται εύκολα ότι και οι δομές $P(X)$ και $2(X)$ είναι ισόμορφες.

Στην δομή $2(X)$ η τιμή $I_A(x) \in \{0, 1\}$ για κάθε $x \in X$ ερμηνεύεται ως η τιμή αλήθειας της πρότασης "$x \in A$", δηλαδή:

$$I_A(x) := \|x \in A\|.$$

Γενικεύοντας, θεωρούμε το σύνολο:

$$IB^X := \{f \,/\, f \,:\, X \to IB\}$$

όπου *IB* μια πλήρης γενικότερη άλγεβρα Boole. Κάθε στοιχείο (συνάρτηση) του παραπάνω συνόλου ορίζει ένα ασαφές σύνολο στο *X*. Επειδή οι τιμές των συναρτήσεων αυτών είναι στοιχεία της άλγεβρας Boole *IB*, τα ασαφή αυτά σύνολα θα τα λέμε *IB-ασαφή σύνολα*.

Για κάθε *IB*-ασαφές σύνολο f στο *X* και για κάθε $x \in X$ η τιμή $f(x)$ εκφράζει την τιμή αλήθειας της πρότασης "$x \in f$", δηλαδή:

$$f(x) := \|x \in f\|.$$

Η ένωση και η τομή των *IB*-ασαφών συνόλων ορίζονται με την βοήθεια των επεκτάσεων των πράξεων $\vee$ και $\wedge$ της άλγεβρας Boole *IB* στο σύνολο IB^X και το συμπλήρωμα με την πράξη $\neg$. Έτσι λοιπόν οδηγούμαστε στην δομή:

$$IB(X) = \left\langle IB^X,\ \vee,\ \wedge,\ \neg,\ 0_{IB},\ 1_{IB} \right\rangle$$

που είναι η δομή των *IB*-ασαφών συνόλων στο *X*.

Ένα βασικό πλεονέκτημα της παραπάνω δομής είναι ότι η λογική που χρησιμοποιείται είναι η κλασική, δηλαδή η λογική που στηρίζεται σε άλγεβρες Boole, όχι φυσικά η δίτιμη, αφού για την έκφραση της *IB*-ασάφειας δεν χρησιμοποιούμε την τετριμμένη άλγεβρα Boole. Το μειονέκτημα είναι ότι δημιουργείται ένα ποιοτικό και όχι ποσοτικό περιβάλλον.

Έχει ακόμη ενδιαφέρον να αναφέρουμε ότι στην περίπτωση που υπάρχει ασάφεια και στα στοιχεία του *X*, οπότε η σχέση της ισότητας δεν είναι δίτιμη, τότε ως *IB*-ασαφές σύνολο στο *X* ορίζεται κάθε συνάρτηση:

$$f \,:\, dom(f) \to IB, \text{ όπου } dom(f) \subseteq X.$$

Το ενδιαφέρον εδώ είναι ότι, επειδή η σχέση της ισότητας στο *X* δεν είναι δίτιμη η τιμή αλήθειας της πρότασης "$x \in f$" ορίζεται για όλα τα στοιχεία του *X* και όχι μόνο για τα στοιχεία του *dom*(*f*), ως εξής:

Για κάθε $x \in X$ ορίζουμε:

$$\|x \in f\| := \bigvee_{y \in dom(f)} \left(f(y) \wedge \|x = y\| \right)$$

όπου η τιμή αλήθειας $\|x = y\|$ ορίζεται κατάλληλα.

Σημείωση: Για μια αυστηρότερη θεμελίωση και περιγραφή των παραπάνω δομών αρκούν μόνο δύο πράξεις, η μία αντιστοιχεί στο συμπλήρωμα ενός συνόλου και η άλλη σε μία από τις δύο πράξεις της ένωσης ή της τομής, αφού ισχύουν οι ισότητες:

$$A \cup B = \left(A^c \cap B^c\right)^{\mathrm{c}}, \quad A \cap B = \left(A^c \cup B^c\right)^{\mathrm{c}}, \quad p \vee q = \neg(\neg p \wedge \neg q),$$

$$p \wedge q = \neg(\neg p \vee \neg q) \qquad \text{(Νόμοι του De Morgan)}$$

$$\max(f,\ g) = \neg\min(1-f,\ 1-g), \quad \min(f,\ g) = \neg\max(1-f,\ 1-g)$$

$$\& \quad T(f, g) = 1 - S(1-f,\ 1-g).$$