Τρεις ενδιαφέρουσες αποδείξεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

Εισαγωγή

Είναι γνωστό ότι για το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουν δοθεί οι πιο πολλές διαφορετικές αποδείξεις που έχουν δοθεί για θεώρημα στα Μαθηματικά. Ο καθηγητής Elisha Scott Loomis (1852 – 1940) στο βιβλίο του "The Pythagorean Proposition[1]" συγκέντρωσε 367 διαφορετικές αποδείξεις! (Σήμερα ίσως έχουν προστεθεί και άλλες). Στις αποδείξεις αυτές συμπεριλαμβάνονται η απόδειξη που αποδίδεται στο Leonardo da Vinci (1452 – 1519), η απόδειξη του 20^{ου} προέδρου των Η.Π.Α. James Abram Garfield (1831 – 1881) και φυσικά η απόδειξη που έδωσε ο μεγάλος μαθηματικός της αρχαιότητας και θεμελιωτής της Γεωμετρίας Ευκλείδης (~325 – 265 π.Χ.), που είναι και η αρχαιότερη γνωστή απόδειξη (δείτε το Ιστορικό Σημείωμα της παραγράφου 1.4 του Β΄ Μέρους του βιβλίου των Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου).

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζονται οι τρεις παραπάνω αποδείξεις, οι οποίες θεωρώ πως έχουν ξεχωριστό ενδιαφέρον όχι μόνο ιστορικό και επιστημονικό αλλά και διδακτικό.

Όπως γνωρίζουμε, ο πρώτος που διατύπωσε και απόδειξε το θεώρημα ήταν ο Πυθαγόρας[2] (6^{ος} αιώνας π.Χ.) ή κάποιος από την πυθαγόρεια αδελφότητα[3]. Σύμφωνα με την παράδοση, ο Πυθαγόρας μόλις αποδείχθηκε το θεώρημα[4], πρόσφερε θυσίες στους θεούς θυσιάζοντας 100 βόδια! Γι' αυτό, το θεώρημα αυτό λέγεται και «Θεώρημα της Εκατόμβης».

---

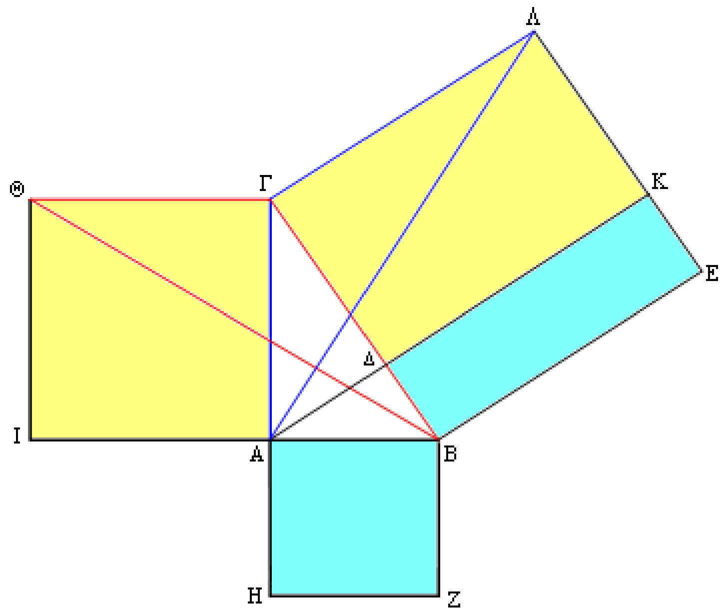
[1] Πρώτη έκδοση το 1927 και δεύτερη το 1940. Το 1968 επανεκδόθηκε από το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών της Αμερικής.

[2] Το θεώρημα, όπως προκύπτει από ευρήματα, το γνώριζαν πριν τον Πυθαγόρα διάφοροι αρχαίοι λαοί, όπως οι Ινδοί, οι Κινέζοι, οι Βαβυλώνιοι, οι Αιγύπτιοι και άλλοι. Όμως, οι λαοί αυτοί, όπως φαίνεται, δεν είχαν ασχοληθεί με την απόδειξή του.

[3] Ο μυστικισμός που χαρακτήριζε την Σχολή που ίδρυσε ο Πυθαγόρας στον Κρότωνα της Νότιας Ιταλίας, όπου είχε καταφύγει εξαιτίας του τυραννικού καθεστώτος του Πολυκράτη στην πατρίδα του την Σάμο, δεν επέτρεπε την ανακοίνωση πολλών στοιχείων.

[4] Η απόδειξη δυστυχώς δεν μας είναι γνωστή. Μόνο εικασίες υπάρχουν σχετικά με τον τρόπο που απέδειξαν οι πυθαγόρειοι το ομώνυμο θεώρημα.

1. Απόδειξη του Ευκλείδη



Η απόδειξη του Ευκλείδη είναι γεωμετρική και στηρίζεται στο παραπάνω σχήμα. Ο Ευκλείδης απέδειξε ότι τα τετράγωνα ΑΓΘΙ και ΑΒΖΗ έχουν το ίδιο εμβαδόν με τα ορθογώνια ΓΛΚΔ και ΒΔΚΕ αντίστοιχα. Για την απόδειξη της πρώτης ισεμβαδικότητας χρησιμοποίησε την ισότητα των τριγώνων ΒΓΘ και ΑΓΛ και το ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΘ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του τετραγώνου ΑΓΘΙ, επειδή έχουν την ίδια βάση ΘΓ και η κορυφή Β είναι σημείο της ευθείας ΙΑ, η οποία είναι παράλληλη της ΘΓ. Για τον ίδιο λόγο και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΛ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του ορθογωνίου ΓΛΚΔ[5]. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται και η ισεμβαδικότητα των σχημάτων ΑΒΖΗ και ΒΔΚΕ.

Το Πυθαγόρειο θεώρημα αποτελεί την πρόταση 47 του βιβλίου Ι των *Στοιχείων* και διατυπώνεται (μεταφέρεται στο μονοτονικό σύστημα γραφής) ως εξής:

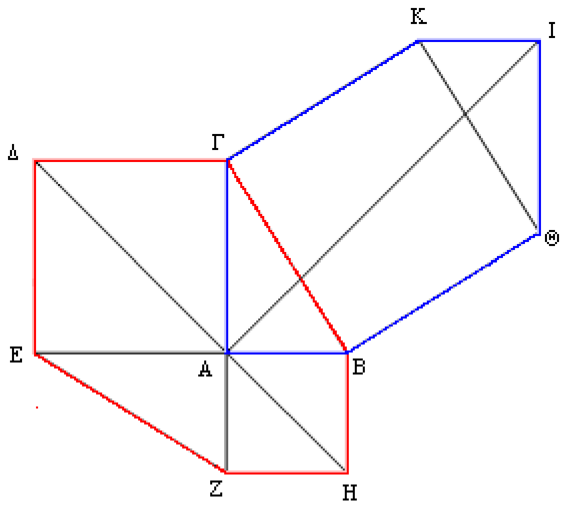
«*Εν τοις ορθογωνίοις τριγώνοις το από της την ορθήν γωνίαν υποτεινούσης πλευράς τετράγωνον ίσον εστί τοις από των την ορθήν γωνίαν περιεχουσών πλευρών τετραγώνοις*».

<u>Σχόλιο:</u> Ο τυπικός τρόπος διδασκαλίας της Γεωμετρίας στη Β΄ Λυκείου στερεί από τους μαθητές την ωραία οπτική απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα, επειδή οι τύποι των εμβαδών των γεωμετρικών σχημάτων διδάσκονται μετά το Πυθαγόρειο θεώρημα. Ωστόσο, μπορούμε, αν θέλουμε, να παρουσιάσουμε αυτή την οπτική απόδειξη στους μαθητές, αφού οι μαθητές τους τύπους των εμβαδών των διαφόρων γεωμετρικών σχημάτων τους γνωρίζουν από το Δημοτικό. Την ισεμβαδικότητα των σχημάτων μπορούμε να την αποδείξουμε με τις μετρικές σχέσεις που θα γνωρίζουν οι μαθητές, δηλαδή τις σχέσεις $ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΒΔ$ και $ΑΓ^2 = ΒΓ \cdot ΓΔ$, οι οποίες διδάσκονται πριν το Πυθαγόρειο θεώρημα.

---

[5] Την απόδειξη αυτού του λήμματος ο Ευκλείδης την έκανε με γεωμετρικό τρόπο και όχι με αλγεβρικό που είναι πιο εύκολος, δηλαδή με την βοήθεια των τύπων των εμβαδών των γεωμετρικών σχημάτων. Αυτό, γιατί ο τύπος του εμβαδού του τριγώνου δεν είχε ανακαλυφθεί τότε.

2. Απόδειξη του Leonardo Da Vinci



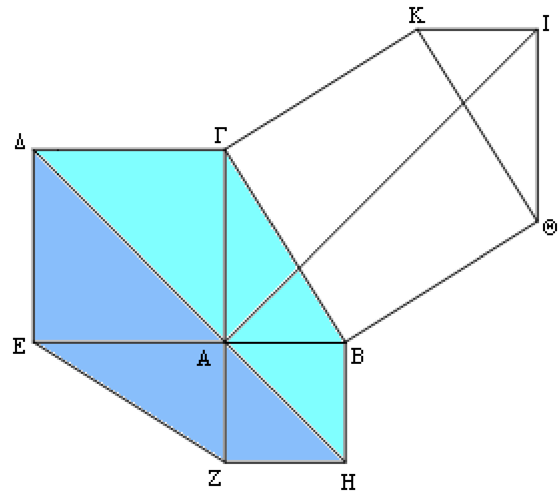
Η απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος που αποδίδεται στον μεγάλο Ιταλό ζωγράφο, καλλιτέχνη και επιστήμονα της Αναγέννησης Leonardo da Vinci στηρίζεται στο παραπάνω σχήμα.

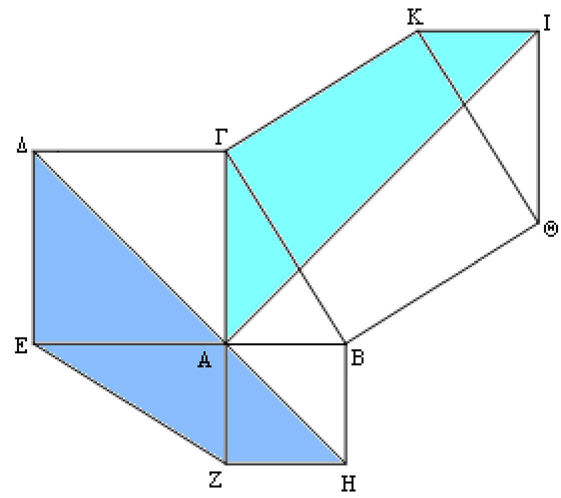
Τα εξάγωνα ΔΓΒΗΖΕ (κόκκινο χρώμα) και ΑΓΚΙΘΒ (μπλε χρώμα) είναι ισεμβαδικά, επειδή τα τετράπλευρα ΕΔΗΖ, ΔΓΒΗ, ΑΓΚΙ και ΑΙΘΒ είναι ίσα μεταξύ τους. Βασική σχέση για την απόδειξη της ισότητας των τετραπλεύρων αυτών είναι η ισότητα των οξειών γωνιών τους όπου κάθε μία είναι 45^o. Αυτό, για μεν τα τετράπλευρα ΕΔΗΖ, ΔΓΒΗ είναι προφανές, για δε τα ΑΓΚΙ και ΑΙΘΒ αποδεικνύεται σχετικά εύκολα[6].

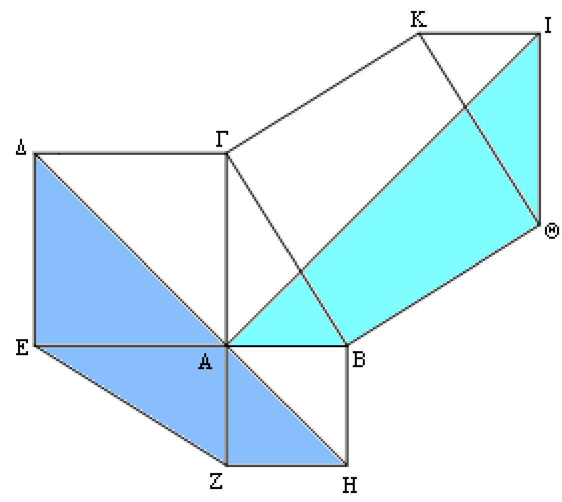
Εποπτικά η ισότητα των τετραπλεύρων αυτών φαίνεται στα σχήματα της επόμενης σελίδας.

---

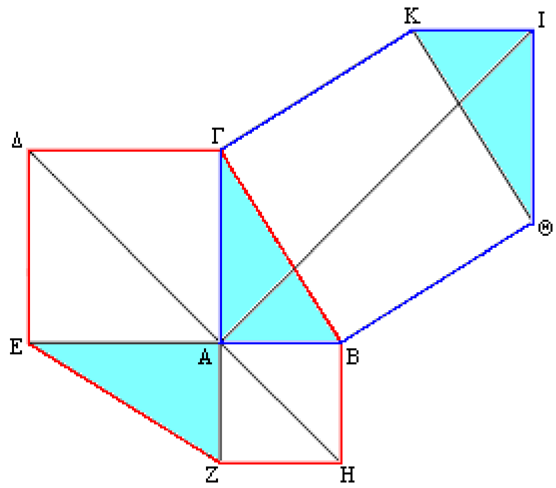
[6] Η απόδειξη παραλείπεται για να μην επιβαρυνθεί το σχήμα με τις απαραίτητες βοηθητικές γραμμές. Για την απόδειξη μπορούμε να εφαρμόσουμε ιδιότητες των παραλληλογράμμων, του τετραγώνου και των εγγράψιμων τετράπλευρων, αφού το τετράπλευρο ΑΓΟΒ είναι εγγράψιμο (Ο το κέντρο του τετραγώνου ΒΓΚΘ).


Κ
Ι
Δ
Γ
Θ
Ε
Α
Β
Ζ
Η


Κ
Ι
Δ
Γ
Θ
Ε
Α
Β
Ζ
Η


Κ
Ι
Δ
Γ
Θ
Ε
Α
Β
Ζ
Η

Αν, τώρα, από τα ισεμβαδικά εξάγωνα ΔΓΒΗΖΕ και ΑΓΚΙΘΒ αφαιρέσουμε τα ίσα τρίγωνα ΑΒΓ (κοινό), ΑΖΕ και ΙΘΚ, τότε προκύπτει το συμπέρασμα του Πυθαγορείου θεωρήματος.
Σχηματικά:



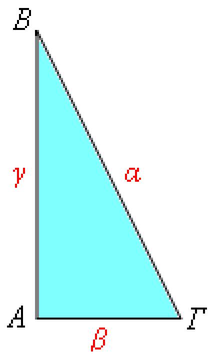
<u>Σχόλιο:</u> Αν θέλουμε να παρουσιάσουμε στους μαθητές είτε της Β΄ Γυμνασίου είτε της Β΄ Λυκείου, για ιστορικούς κυρίως λόγους, την παραπάνω απόδειξη του Leonardo da Vinci, νομίζω ότι καλό είναι να μείνουμε στο οπτικό μέρος και να μην εμπλέξουμε τους μαθητές σε αποδείξεις, εκτός και αν το ζητήσουν οι ίδιοι.

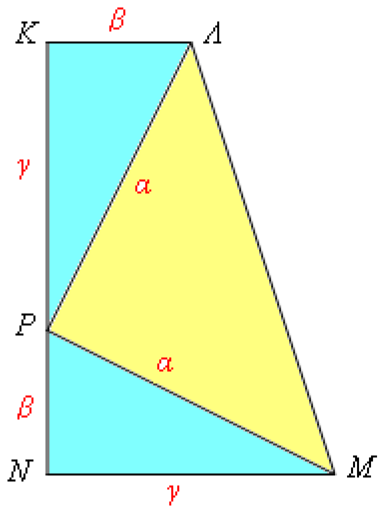
Επίσης, ενώ η απόδειξη του Leonardo da Vinci προσφέρεται να παρουσιαστεί ως οπτική απόδειξη στους μαθητές της Β΄ Γυμνασίου λόγω της ισότητας των τετραπλεύρων, αντίθετα η απόδειξη του Ευκλείδη δεν προσφέρεται, διότι δεν είναι εμφανής η ισεμβαδικότητα των σχημάτων αφού δεν είναι ίσα. Όμως, αν θέλουμε μπορούμε και καλό είναι να παρουσιάσουμε και στους μαθητές της Β΄ Γυμνασίου την οπτική απόδειξη του Ευκλείδη, η οποία είναι απλή και μπορεί εύκολα να γίνει κατανοητή από τους μαθητές, αφού τους ενημερώσουμε ότι τα σχήματα που είναι χρωματισμένα με το ίδιο χρώμα είναι ισεμβαδικά. Για να πεισθούν όμως περισσότερο οι μαθητές μπορούμε να αποδείξουμε την ισεμβαδικότητα των σχημάτων αυτών με την βοήθεια του ημιτόνου μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου αναφέροντας τον αντίστοιχο ορισμό. Να σημειωθεί ότι στη Β΄ Γυμνασίου το κεφάλαιο της Τριγωνομετρίας διδάσκεται αμέσως μετά το Πυθαγόρειο θεώρημα. Στη συνέχεια με την βοήθεια του ημιτόνου θα αποδείξουμε τις σχέσεις:

$$\mathrm{AB}^2 = \mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{B\Delta} \quad \text{και} \quad \mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{B\Gamma}\cdot\mathrm{\Gamma\Delta}.$$

Δηλαδή θα πούμε στους μαθητές:
Στο σχήμα της απόδειξης του Ευκλείδη ισχύει $\mathrm{B\hat{A}\Delta} = \mathrm{A\hat{\Gamma}B}$ (ως συμπληρωματικές της $\hat{\mathrm{B}}$ του τριγώνου ΑΒΓ). Έτσι στα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΒΓ για τις ίσες γωνίες $\mathrm{B\hat{A}\Delta}$ και $\mathrm{A\hat{\Gamma}B}$ έχουμε: $\eta\mu\mathrm{B\hat{A}\Delta} = \dfrac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{AB}}$ και $\eta\mu\mathrm{A\hat{\Gamma}B} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}}$ και συνεπώς $\dfrac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}}$ κλπ.
Όμοια ισχύει $\mathrm{\Gamma\hat{A}\Delta} = \mathrm{A\hat{B}\Gamma}$ κλπ.

3. Απόδειξη του James Abram Garfield





O James Abram Garfield το 1876 για το Πυθαγόρειο θεώρημα έδωσε μία πολύ ωραία αλγεβρική απόδειξη, η οποία στηρίζεται στο παραπάνω τραπέζιο.

Η απόδειξη προκύπτει αν εκφράσουμε το εμβαδόν του τραπεζίου ΚΛΜΝ με δύο τρόπους, με τον τύπο του εμβαδού του τραπεζίου και ως άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων τριγώνων ΚΛΡ, ΡΛΜ και ΝΡΜ που το διαμερίζουν.
Έτσι έχουμε:

$$(\text{ΚΛΜΝ}) = \frac{(\gamma+\beta)\cdot(\beta+\gamma)}{2} = \frac{\beta\cdot\gamma}{2} + \frac{\beta\cdot\gamma}{2} + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma = 2\beta\gamma + \alpha^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$$

<u>**Σχόλιο:**</u> Η παραπάνω απόδειξη είναι απλή και νομίζω πως μπορούμε να την παρουσιάσουμε στους μαθητές της Β΄ Γυμνασίου, αφού οι μαθητές αυτοί έχοντας διδαχθεί στην Α΄ τάξη την επιμεριστική ιδιότητα δεν θα δυσκολευτούν να βρουν και με την δική μας καθοδήγηση το ανάπτυγμα του γινομένου $(\gamma + \beta)(\beta + \gamma)$, το οποίο θα το βρουν ως εξής:

$$(\gamma + \beta)(\beta + \gamma) = (\gamma + \beta)\beta + (\gamma + \beta)\gamma = \gamma\beta + \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma.$$

Πιστεύω όμως ότι για τους μαθητές της Β΄ Γυμνασίου για το Πυθαγόρειο θεώρημα είναι καλύτερο να επιλέγουμε αποδείξεις με οπτικό ενδιαφέρον, όπως είναι για παράδειγμα η εισαγωγική Δραστηριότητα του σχολικού βιβλίου και οι δύο προηγούμενες.

Επίσης, μια πολύ καλή οπτική απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος, η οποία προσφέρεται για την διδασκαλία του στην τάξη αυτή είναι και η οπτική απόδειξη του Dudeney (1917). Είναι παραπλήσια με την απόδειξη που αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου στη δεύτερη στήλη της σελίδας 131 με τίτλο «*ΓΙΑ ΔΙΑΣΚΕΔΑΣΗ*». Στην απόδειξη του Dudeney το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων που διαμερίζουν το τετράγωνο που είναι σχεδιασμένο πάνω στην πλευρά ΑΓ είναι το κέντρο του τετραγώνου αυτού (το ένα ευθύγραμμο τμήμα από αυτά είναι κάθετο στην υποτείνουσα ΒΓ και το άλλο παράλληλο), οπότε τα τέσσερα τετράπλευρα της διαμέρισης είναι ίσα μεταξύ τους. Έτσι λοιπόν οι μαθητές δεν θα δυσκολευτούν να καλύψουν το τετράγωνο που είναι σχεδιασμένο πάνω στην υποτείνουσα ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ με τα τέσσερα αυτά ίσα τετράπλευρα και με το τετράγωνο που είναι σχεδιασμένο πάνω στην πλευρά ΑΒ.