Μία γενίκευση της Αριθμητικής και της Γεωμετρικής προόδου - Ο Σταθμικός μέσος ως γενικός μέσος

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος κλάδου ΠΕ03
www.p-theodoropoulos.gr

Περίληψη

Στην εργασία αυτή μελετάται η ειδική κατηγορία των ακολουθιών όπου κάθε όρος, εκτός από τον πρώτο, προκύπτει από τον προηγούμενό του αν αυτός πολλαπλασιασθεί με ένα σταθερό αριθμό και στη συνέχεια στο γινόμενο που προκύπτει προστεθεί ένας επίσης σταθερός αριθμός. Οι ακολουθίες αυτές αποτελούν γενίκευση της αριθμητικής και της γεωμετρικής προόδου.

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα της έρευνας αυτής είναι η ανάδειξη της γενικότητας του σταθμικού μέσου. Έτσι λοιπόν και οι τρεις μέσοι που σχετίζονται με τις προόδους, δηλαδή ο αριθμητικός, ο γεωμετρικός και ο αρμονικός είναι σταθμικοί μέσοι όπου οι συντελεστές βαρύτητας ορίζονται με συγκεκριμένο τρόπο.

Εισαγωγή

Η ωριαία διδασκαλία στο σχολείο παρουσιάζει μία ιδιαίτερη δυναμική, διότι στη διάρκειά της ανταλλάσσονται απόψεις και γενικά συντελείται η μάθηση. Γι’ αυτό λοιπόν το κλίμα της τάξης πρέπει να είναι θετικό και η μορφή της διδασκαλίας τέτοια, ώστε να εξασφαλίζεται ουσιαστική αλληλεπίδραση τόσο μεταξύ του εκπαιδευτικού και των μαθητών όσο και μεταξύ των μαθητών. Οι μαθητές θα πρέπει να μπορούν να εκφράζουν ελεύθερα τις απορίες και τις απόψεις τους.

Κατά το σχολικό έτος 2006-2007 στο μάθημα της Άλγεβρας στη Β΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στην § 3.1, η οποία αναφέρεται στην έννοια της ακολουθίας, λύσαμε στο μάθημα μία άσκηση, η οποία ζητούσε την εύρεση τού αναδρομικού τύπου της ακολουθίας $a_n = 2^n - 1$, που είναι ο τύπος $a_{n+1} = 2a_n + 1$. Στη συνέχεια, όταν έκανα εισαγωγή στην αριθμητική πρόοδο, παράλληλα με τον ορισμό της αριθμητικής προόδου έδωσα και τον ορισμό της γεωμετρικής για σύγκριση και συσχέτιση, ώστε οι μαθητές να απομνημονεύσουν καλύτερα τους δύο ορισμούς σύμφωνα με τη «Θεωρία Επεξεργασίας Πληροφοριών». Τότε ένας μαθητής της τάξης παρεμβαίνοντας μου είπε: «Κύριε η ακολουθία με τύπο: $a_{n+1} = 2a_n + 1$, που βρήκαμε στην άσκηση που λύσαμε πριν είναι μικτή πρόοδος;» Του απάντησα δε ως εξής: «Από ό,τι γνωρίζω τέτοιες ακολουθίες δεν έχουν μελετηθεί ειδικά και επομένως είναι ανοικτό το θέμα για εξερεύνηση». Πρότεινα μάλιστα στους μαθητές όποιος θέλει να ασχοληθεί με το θέμα αυτό, φυσικά και με τη δική μου καθοδήγηση. Βέβαια κανένας δεν ασχολήθηκε, διότι δύσκολα ένας μαθητής καταπιάνεται με ένα θέμα που αφήνεται στην προαιρετική του επιλογή. Εμένα όμως με προβλημάτισε η ιδέα και η παρατήρηση του μαθητή και όταν βρήκα χρόνο ασχολήθηκα με την εξερεύνηση του παραπάνω θέματος, τα αποτελέσματα της οποίας παρουσιάζονται στην παρούσα εργασία. Για την απόδοση της έννοιας των ακολουθιών αυτών προτείνω και χρησιμοποιώ τον όρο «**αλγεβρική**

πρόοδος» κατ’ αναλογία προς την αριθμητική και γεωμετρική πρόοδο. Είναι φανερό ότι η αλγεβρική πρόοδος αποτελεί τη γενίκευση της αριθμητικής και της γεωμετρικής προόδου. Απέφυγα τον όρο «γενική πρόοδος», διότι δεν αποτελεί γενίκευση της αρμονικής προόδου, αν και, όπως αποδεικνύεται, στοιχεία της συναντάει κανείς και στην αρμονική πρόοδο!

Ορισμός: *Μια ακολουθία* a_n, $n \in IN^*$ *θα τη λέμε* ***αλγεβρική πρόοδο****, αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί λ και ω με λ ¹ 0 τέτοιοι ώστε για κάθε* $n \in IN^*$ *να ισχύει:*

$$a_{n+1} = l\,a_n + w\,.$$

Τον αριθμό λ θα τον λέμε ***συντελεστή*** *της προόδου και τον ω* ***σταθερό όρο*** *της προόδου.*

Ειδικότερα, αν ω = 0 και $α_1 \neq 0$ τότε η πρόοδος λέγεται **γεωμετρική** και ο αριθμός *λ* λόγος της προόδου, ενώ αν *λ* = 1 τότε η πρόοδος λέγεται **αριθμητική** και ο ω διαφορά της προόδου.

Ο γενικός όρος μιας αλγεβρικής προόδου συναρτήσει των $α_1$, λ, ω και ν

Με τον αναδρομικό τύπο $α_{ν+1} = λα_ν + ω$ μιας αλγεβρικής προόδου μπορούμε με διαδοχικά βήματα να βρίσκουμε οποιονδήποτε όρο της. Μπορούμε όμως να υπολογίσουμε τον νιοστό όρο της προόδου αυτής και συναρτήσει των αριθμών $α_1$, λ, ω και ν.

Σύμφωνα λοιπόν με τον ορισμό της αλγεβρικής προόδου έχουμε:

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= l\,a_1 + w \\
a_3 &= l\,a_2 + w \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n-1} &= l\,a_{n-2} + w \\
a_n &= l\,a_{n-1} + w
\end{aligned}$$

- Αν λ = 1 τότε προσθέτοντας κατά μέλη τις ισότητες αυτές προκύπτει ο τύπος της αριθμητικής προόδου:

$$a_n = a_1 + (n-1)w$$

- Αν $λ \neq 1$ τότε προσθέτοντας στα μέλη των παραπάνω ισοτήτων τον όρο $\dfrac{w}{l-1}$ παίρνουμε:

$$a_1+\frac{w}{l-1}=a_1+\frac{w}{l-1}$$
$$a_2+\frac{w}{l-1}=l\,a_1+w+\frac{w}{l-1}$$
$$a_3+\frac{w}{l-1}=l\,a_2+w+\frac{w}{l-1}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n-1}+\frac{w}{l-1}=l\,a_{n-2}+w+\frac{w}{l-1}$$
$$a_n+\frac{w}{l-1}=l\,a_{n-1}+w+\frac{w}{l-1}$$

Εκτελώντας στη συνέχεια τις πράξεις στα δεύτερα μέλη των παραπάνω ισοτήτων, πλην της πρώτης, προκύπτουν οι παρακάτω ισότητες:

$$a_1+\frac{w}{l-1}=a_1+\frac{w}{l-1}$$
$$a_2+\frac{w}{l-1}=l\left(a_1+\frac{w}{l-1}\right)$$
$$a_3+\frac{w}{l-1}=l\left(a_2+\frac{w}{l-1}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n-1}+\frac{w}{l-1}=l\left(a_{n-2}+\frac{w}{l-1}\right)$$
$$a_n+\frac{w}{l-1}=l\left(a_{n-1}+\frac{w}{l-1}\right).$$

Τέλος, πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις ισότητες αυτές παίρνουμε:

$$a_n+\frac{w}{l-1}=\left(a_1+\frac{w}{l-1}\right)\cdot l^{n-1} \qquad \Leftrightarrow$$

$$a_n=\left(a_1+\frac{w}{l-1}\right)\cdot l^{n-1}-\frac{w}{l-1}$$

Άρα ο νιοστός όρος μιας αλγεβρικής προόδου με πρώτο όρο τον $α_1$, συντελεστή $λ$ και σταθερό όρο $ω$ είναι:

$$a_n = \begin{cases} a_1 + (n-1)\cdot w, & \text{αν } \lambda = 1 \\ \\ \left(a_1 + \dfrac{w}{l-1}\right)\cdot l^{n-1} - \dfrac{w}{l-1}, & \text{αν } \lambda \neq 1 \end{cases} \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι για ω = 0 και λ ≠ 1 παίρνουμε $a_n = a_1 \cdot l^{n-1}$ που είναι ο γνωστός τύπος της γεωμετρικής προόδου.
Ισχύει η παρακάτω πρόταση.

<u>Πρόταση</u>: *Κάθε ακολουθία με τύπο* $a_n = a\,l^n + b$, $n \in IN^*$ *με αλ ≠ 0 και λ ≠ 1 είναι αλγεβρική πρόοδος.*

<u>Απόδειξη</u>

Έχουμε:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a\,l^{n+1} + b \\ &= l\,a\,l^n + b + l\,b - l\,b \\ &= (a\,l^n + b)\,l + b - l\,b \\ &= l\,a_n + (1-l)\,b \end{aligned}$$

Άρα η ακολουθία $a_n = a\,l^n + b$ είναι αλγεβρική πρόοδος με συντελεστή *λ* και *ω* = (1-*λ*)*β*.

<u>Άθροισμα ν διαδοχικών όρων αλγεβρικής προόδου</u>

Θα υπολογίσουμε τώρα το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας αλγεβρικής προόδου. Σύμφωνα με τον ορισμό της αλγεβρικής προόδου έχουμε:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= l\,a_1 + w \\ a_3 &= l\,a_2 + w \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} &= l\,a_{n-2} + w \\ a_n &= l\,a_{n-1} + w \end{aligned}$$

- Αν λ = 1, τότε ως γνωστόν ισχύει: $S_\nu = \dfrac{[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega]\cdot\nu}{2}$

- Αν λ ≠ 1, τότε προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω ισότητες παίρνουμε:

$$S_n = a_1 + l\,S_{n-1} + (n-1)w$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία ισότητα το S_{n-1} με $S_n - a_n$ έχουμε:

$$S_\nu = \alpha_1 + \lambda(S_\nu - \alpha_\nu) + (\nu-1)\omega \quad \Leftrightarrow$$

$$S_\nu = \alpha_1 + \lambda S_\nu - \lambda\alpha_\nu + (\nu-1)\omega \quad \Leftrightarrow$$

$$S_\nu - \lambda S_\nu = \alpha_1 - \lambda\alpha_\nu + (\nu-1)\omega \quad \Leftrightarrow$$

$$S_\nu = \frac{\lambda\alpha_\nu - \alpha_1 - (\nu-1)\omega}{\lambda-1} \quad \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$S_\nu = \frac{\lambda\left[\left(\alpha_1 + \frac{\omega}{\lambda-1}\right)\lambda^{\nu-1} - \frac{\omega}{\lambda-1}\right] - \alpha_1 - (\nu-1)\omega}{\lambda-1}$$

Άρα το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας αλγεβρικής προόδου είναι:

$$S_\nu = \begin{cases} \dfrac{[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega]\cdot\nu}{2}, & \text{αν } \lambda = 1 \\[2ex] \dfrac{\lambda\left[\left(\alpha_1 + \frac{\omega}{\lambda-1}\right)\lambda^{\nu-1} - \frac{\omega}{\lambda-1}\right] - \alpha_1 - (\nu-1)\omega}{\lambda-1}, & \text{αν } \lambda \neq 1 \end{cases}$$

Για $\omega = 0$ και $\lambda \neq 1$ παίρνουμε $S_n = a_1 \dfrac{l^n - 1}{l - 1}$, που είναι ο τύπος που μας δίνει το άθροισμα των ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο τον a_1 και λόγο $\lambda \neq 1$.

Πριν προχωρήσουμε στη μελέτη του αλγεβρικού μέσου, που παρουσιάζει και το μεγαλύτερο ενδιαφέρον, ας δούμε ένα παράδειγμα εφαρμογής των παραπάνω σε μία άσκηση. Η άσκηση που ακολουθεί είναι μία τροποποίηση της άσκησης 16 της σελίδας 108 του σχολικού βιβλίου της άλγεβρας της Β΄ Λυκείου.

<u>Εφαρμογή:</u> Το ψυγείο ενός φορτηγού περιέχει 40 l νερό. Αδειάζουμε 5 l νερό και το αντικαθιστούμε με 4 l αντιπηκτικό και 1 l νερό. Ύστερα αδειάζουμε πάλι 5 l του μείγματος και το αντικαθιστούμε με 4 l αντιπηκτικό και 1 l νερό κ.ο.κ. Αν D_ν η ποσότητα του νερού στο ψυγείο αφού εφαρμοστεί η διαδικασία ν φορές, να βρείτε τον αναδρομικό τύπο της ακολουθίας D_ν και στη συνέχεια να εκφράσετε το νιοστό όρο της ακολουθίας αυτής συναρτήσει του ν.

Λύση

Έστω D_ν η ποσότητα του νερού στο ψυγείο του φορτηγού αφού εφαρμοστεί η διαδικασία ν φορές. Κατά την επόμενη φορά εφαρμογής της διαδικασίας είναι προφανές ότι η ποσότητα του νερού στο ψυγείο θα είναι:

$$D_{n+1} = \frac{7}{8} D_n + 1$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η ακολουθία D_ν είναι αλγεβρική πρόοδος με

$$D_1 = 36, \quad l = \frac{7}{8} \quad \text{και} \quad \omega = 1.$$

Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (1), ο νιοστός όρος της συναρτήσει του ν είναι:

$$D_\nu = \left(36 + \frac{1}{\frac{7}{8} - 1}\right) \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{\nu-1} - \frac{1}{\frac{7}{8} - 1} \quad \Leftrightarrow$$

$$D_\nu = 28 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{\nu-1} + 8$$

Ο αλγεβρικός μέσος

Αφήσαμε τη μελέτη του αλγεβρικού μέσου για το τέλος λόγω της σπουδαιότητας που παρουσιάζει η έννοια αυτή.

Έστω α, β, γ τρεις διαδοχικοί όροι μιας αλγεβρικής προόδου. Έχουμε:

$$b = la + w \quad (2) \quad \&$$
$$g = lb + w \quad (3)$$

Αν αφαιρέσουμε τα μέλη της (2) από τα μέλη της (3) παίρνουμε:

$$g - b = l(b - a) \quad \Leftrightarrow$$

$$g - b = lb - la \quad \Leftrightarrow$$

$$lb + b = la + g \quad \Leftrightarrow$$

$$(l + 1)b = la + g$$

Τώρα,

- Αν λ = -1, τότε είναι $a = g$ και $b = -a + w$
- Αν λ ≠ -1, τότε

$$b = \frac{l\,a + g}{l + 1}$$

Αντίστροφα. Έστω a, b και g τρεις αριθμοί. Έχουμε τις περιπτώσεις:

1. Αν $a = g$ και $b \neq a$ τότε αποδεικνύεται ότι οι αριθμοί a, b και g είναι διαδοχικοί όροι αλγεβρικής προόδου με $\lambda = -1$ και $\omega = \alpha + \beta$.
2. Αν $a = b = g$ τότε προφανώς οι αριθμοί a, b και g είναι διαδοχικοί όροι αλγεβρικής προόδου. Στην περίπτωση αυτή οι αριθμοί λ και ω δεν ορίζονται μονοσήμαντα.
3. Αν $a \neq b$ και υπάρχει πραγματικός αριθμός $\lambda \in IR - \{-1, 0\}$ τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$\beta = \frac{\lambda\alpha + \gamma}{\lambda + 1} \qquad (4)$$

τότε οι αριθμοί a, b και g είναι διαδοχικοί όροι αλγεβρικής προόδου. Πράγματι, από τη σχέση (4), αφού $\alpha \neq \beta$, προκύπτει ότι

$$\lambda = \frac{\gamma - \beta}{\beta - \alpha} \qquad (5)\,.$$

Θέτοντας $w = b - l\,a$ παίρνουμε:

$$\omega = \beta - \lambda\alpha \overset{(4)}{=} \frac{\lambda\alpha + \gamma}{\lambda + 1} - \lambda\alpha \overset{(5)}{=} \frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{\beta - \alpha}$$

και έχουμε:

$$\lambda\beta + \omega = \frac{\gamma - \beta}{\beta - \alpha} \cdot \beta + \frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{\beta - \alpha} = \frac{\beta\gamma - \beta^2 + \beta^2 - \alpha\gamma}{\beta - \alpha} =$$

$$= \frac{\beta\gamma - \alpha\gamma}{\beta - \alpha} = \frac{\gamma(\beta - \alpha)}{\beta - \alpha} = \gamma$$

Άρα οι αριθμοί a, b και g είναι διαδοχικοί όροι αλγεβρικής προόδου με συντελεστή λ και σταθερό όρο $w = \dfrac{b^2 - ag}{b - a}$.

<u>Ορισμός</u>: *Έστω α και γ δύο πραγματικοί αριθμοί και λ ένας θετικός πραγματικός αριθμός. Ο αριθμός*

$$\frac{l\,a + g}{l + 1}$$

*θα λέγεται **αλγεβρικός μέσος** των αριθμών α και γ με συντελεστή λ.*

<u>Παρατήρηση</u>: Ερμηνεύοντας τον αλγεβρικό μέσο δύο αριθμών α και γ με συντελεστή λ όταν $\alpha \neq \gamma$ αναφέρουμε τα εξής:

1. Όταν αναφερόμαστε στον αλγεβρικό μέσο δύο αριθμών, η σειρά με την οποία θα αναφέρουμε τους δύο αριθμούς δεν μπορεί να είναι τυχαία, διότι άλλος είναι ο αλγεβρικός μέσος των αριθμών *α* και *γ* με συντελεστή *λ* και άλλος των αριθμών *γ* και *α*.
2. Ο αλγεβρικός μέσος $\frac{l a + g}{l + 1}$ των αριθμών α και γ είναι ανάμεσα στους αριθμούς *α* και γ και ταυτίζεται με το **σταθμικό** μέσο αυτών με συντελεστές βαρύτητας λ και 1 αντίστοιχα.
3. Αν $b = \frac{l a + g}{l + 1}$ ο αλγεβρικός μέσος των αριθμών α και γ με συντελεστή λ, τότε ο αριθμός *λα* διαφέρει από τον *β* όσο ο *λβ* από τον *γ*.

<u>**Παράδειγμα**</u>: Για τους αριθμούς 5, 13 και 29 ισχύει: $13 = \frac{2 \cdot 5 + 29}{2 + 1} = \left(\frac{39}{3}\right)$.

Άρα οι αριθμοί αυτοί είναι διαδοχικοί όροι αλγεβρικής προόδου με

$$\lambda = 2 \text{ και } \omega = \frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{\beta - \alpha} = \frac{13^2 - 5 \cdot 29}{13 - 5} = \frac{169 - 145}{8} = 3$$

Για επαλήθευση έχουμε:

$$13 = 2 \cdot 5 + 3 \qquad \text{και} \qquad 29 = 2 \cdot 13 + 3$$

Το 13 είναι ο αλγεβρικός μέσος των αριθμών 5 και 29 με συντελεστή 2, δηλαδή το διπλάσιο του 5 (10) διαφέρει από το 13 όσο διαφέρει το διπλάσιο του13 (26) από το 29.

Αν $a_1 = 5$ τότε ο νιοστός όρος της προόδου αυτής σύμφωνα με τον τύπο (1) είναι:

$$a_n = \left(5 + \frac{3}{2 - 1}\right) \cdot 2^{n-1} - \frac{3}{2 - 1} =$$

$$= 2^{n+2} - 3$$

<u>Αριθμητικός, γεωμετρικός και αρμονικός μέσος ως αλγεβρικοί μέσοι</u>

Ο αριθμητικός μέσος δύο αριθμών *α* και *β* είναι ο αλγεβρικός μέσος αυτών με λ = 1. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού μία αριθμητική πρόοδος είναι και αλγεβρική με λ = 1. Το ίδιο ισχύει και για το γεωμετρικό μέσο, δηλαδή ο γεωμετρικός μέσος δύο θετικών αριθμών *α* και *β* που είναι ο αριθμός $\sqrt{ab}$ είναι ο αλγεβρικός μέσος των αριθμών αυτών με συντελεστή:

$$l = \frac{\sqrt{ab}}{a} = \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$$

αφού οι αριθμοί a, $\sqrt{ab}$ και b είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, που είναι και αλγεβρική πρόοδος. Πράγματι έχουμε:

$$\frac{\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\cdot a+b}{\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+1}=\frac{\sqrt{b}\cdot a+\sqrt{a}\cdot b}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=$$

$$=\sqrt{ab}$$

Μετά από αυτά γεννιέται το ερώτημα: Μήπως ισχύει το ίδιο και για τον αρμονικό μέσο δύο ομόσημων αριθμών α και β ;
Ως γνωστόν ο αρμονικός μέσος των αριθμών αυτών είναι ο αριθμός:

$$\frac{2ab}{a+b}$$

Εύκολα η παραπάνω παράσταση μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\frac{2ab}{a+b}=\frac{ba+ab}{a+b}=\frac{\frac{ba+ab}{a}}{\frac{a+b}{a}}$$

$$=\frac{\frac{ba}{a}+\frac{ab}{a}}{\frac{a}{a}+\frac{b}{a}}=\frac{\frac{b}{a}\cdot a+b}{\frac{b}{a}+1}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι και ο αρμονικός μέσος δύο ομόσημων αριθμών α και β είναι ο αλγεβρικός μέσος αυτών με συντελεστή $l=\frac{b}{a}$.

<u>**Σημείωση**</u>**:** Υπάρχουν και άλλοι μέσοι με ιδιαίτερη ονομασία, όπως π. χ. ο **αντιαρμονικός** μέσος δύο ομόσημων αριθμών α και β που είναι ο αριθμός $\frac{a^2+b^2}{a+b}$. Αποδεικνύεται εύκολα ότι και ο αντιαρμονικός μέσος δύο ομόσημων αριθμών α και β είναι ο αλγεβρικός μέσος αυτών με συντελεστή $l=\frac{a}{b}$.

Αξίζει ακόμη να αναφερθεί ότι δύο θετικών αριθμών α και β ο γεωμετρικός μέσος είναι επίσης ο σταθμικός μέσος αυτών με συντελεστές βαρύτητας $\sqrt{b}$ και $\sqrt{a}$, ο αρμονικός με β και α και ο αντιαρμονικός με α και β αντίστοιχα.

<u>Αλγεβρική πρόοδος και αρμονική πρόοδος</u>

Στη συνέχεια το ερώτημα που τίθεται είναι: Μήπως μία αρμονική πρόοδος είναι και αλγεβρική; Θα προσπαθήσουμε να απαντήσουμε σ’ αυτό το ερώτημα μέσα από ένα παράδειγμα. Έστω η ακολουθία:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \ldots$$

Είναι προφανές ότι η ακολουθία αυτή αποτελεί αρμονική πρόοδο. Έτσι το $\frac{1}{4}$ είναι ο αρμονικός μέσος των αριθμών $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{6}$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω το $\frac{1}{4}$ θα είναι ο αλγεβρικός μέσος των αριθμών $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{6}$ με συντελεστή:

$$l = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

που εύκολα επαληθεύεται ότι ισχύει, δηλαδή:

$$\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{1}{4}$$

Άρα οι αριθμοί $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ και $\frac{1}{6}$ είναι διαδοχικοί όροι αλγεβρικής προόδου με $l = \frac{1}{3}$ και

$$\omega = \frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{\beta - \alpha} = \frac{\frac{1}{16} - \frac{1}{12}}{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{48}}{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{12}$$

Για επαλήθευση έχουμε:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{12} = \frac{1}{6}+\frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{12} = \frac{1}{12}+\frac{1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Όμως

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{12} = \frac{1}{18}+\frac{1}{12} = \frac{5}{36} \neq \frac{1}{8}$$

Άρα η ακολουθία:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \frac{1}{12}, \ldots$$

δεν είναι αλγεβρική πρόοδος.

Κάθε τριάδα διαδοχικών όρων της όμως, όπως είδαμε, είναι διαδοχικοί όροι αλγεβρικής προόδου. Η τιμή του λ είναι διαφορετική για κάθε τριάδα και γι' αυτό μία αρμονική πρόοδος δεν είναι αλγεβρική. Γενικά αν α, β και γ είναι διαδοχικοί όροι μιας αρμονικής προόδου τότε οι αριθμοί αυτοί αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας αλγεβρικής προόδου με $l = \frac{g}{a}$. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η πρόταση που ακολουθεί, η οποία αποτελεί αντίστροφη πρόταση της παραπάνω.

<u>Πρόταση</u>: *Έστω μία ακολουθία* a_n, $n \in \mathrm{IN}^*$ *με* $a_n \neq 0$ *για κάθε* $n \in \mathrm{IN}^*$. *Αν για κάθε* $n \in \mathrm{IN}^*$ *οι όροι* a_n, a_{n+1} και a_{n+2} *αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας αλγεβρικής προόδου με* $\lambda = \frac{\alpha_{\nu+2}}{\alpha_\nu}$, *τότε η ακολουθία* a_n, $n \in \mathrm{IN}^*$ *είναι αρμονική πρόοδος.*

<u>Απόδειξη</u>

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η ακολουθία

$$b_n = \frac{1}{a_n},\ n \in \mathrm{IN}^*$$

είναι αριθμητική πρόοδος. Έχουμε:

Αφού οι αριθμοί a_n, a_{n+1} και a_{n+2} είναι διαδοχικοί όροι αλγεβρικής προόδου με $\lambda = \frac{\alpha_{\nu+2}}{\alpha_\nu}$ έπεται ότι $\frac{\alpha_{\nu+2}}{\alpha_\nu} \neq -1$, διότι αν $\lambda = -1$ τότε, αφού οι αριθμοί a_n, a_{n+1} και a_{n+2} είναι διαδοχικοί όροι αλγεβρικής προόδου, θα ήταν $\alpha_\nu = \alpha_{\nu+2}$ δηλαδή θα είχαμε $\lambda = \frac{a_{n+2}}{a_n} = 1$ (άτοπο).

Επομένως είναι:

$$a_{n+1} = \frac{\frac{a_{n+2}}{a_n} \cdot a_n + a_{n+2}}{\frac{a_{n+2}}{a_n} + 1}$$

από όπου παίρνουμε:

$$a_{n+1} = \frac{2a_n \cdot a_{n+2}}{a_n + a_{n+2}} \Leftrightarrow \frac{2}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+2}} - \frac{1}{a_{n+1}}$$

Επειδή η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $n \in \mathrm{IN}^*$, έπεται ότι η διαφορά δύο διαδοχικών όρων της ακολουθίας

$$b_n = \frac{1}{a_n},\ n \in \mathrm{IN}^*$$

είναι σταθερή.

Άρα η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος, οπότε η ακολουθία a_n, $n \in \mathrm{IN}^*$ είναι αρμονική πρόοδος.

Ο σταθμικός μέσος ως γενικός μέσος

Είδαμε πιο πάνω ότι τόσο ο γεωμετρικός μέσος όσο και ο αρμονικός δύο θετικών αριθμών είναι οι σταθμικοί μέσοι των αριθμών αυτών με ανάλογους συντελεστές βαρύτητας. Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι, μήπως αυτό μπορεί να γενικευθεί και για ν με $\nu > 2$ θετικούς αριθμούς;
Η απάντηση δίνεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα Ι: *Έστω* $x_1, x_2, ..., x_n$ με $n \geq 2$ ν *θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Υπάρχουν θετικοί αριθμοί* $l_1, l_2, ..., l_n$ *και* $r_1, r_2, ..., r_n$ *τέτοιοι ώστε ο γεωμετρικός μέσος (G) και ο αρμονικός μέσος (H) των αριθμών* $x_1, x_2, ..., x_n$ *να εκφράζονται ως εξής:*

$$G = \sqrt[\nu]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_\nu} = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_\nu x_\nu}{\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_\nu} \quad \textit{και}$$

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}} = \frac{r_1 x_1 + r_2 x_2 + ... + r_n x_n}{r_1 + r_2 + ... + r_n}$$

Απόδειξη

Αν θέσουμε:

$$l_1 = \sqrt[n]{x_2^{n-1} \cdot x_3^{n-2} \cdot ... \cdot x_n}, \quad l_2 = \sqrt[n]{x_3^{n-1} \cdot x_4^{n-2} \cdot ... \cdot x_n^2 \cdot x_1}, \quad ..., \quad l_n = \sqrt[n]{x_1^{n-1} \cdot x_2^{n-2} \cdot ... \cdot x_{n-1}}$$

τότε εύκολα αποδεικνύεται (πολλαπλασιάζοντας χιαστί) ότι ισχύει:

$$\frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n} =$$

$$= \frac{\sqrt[n]{x_2^{n-1} \cdot x_3^{n-2} \cdot ... \cdot x_n} \cdot x_1 + \sqrt[n]{x_3^{n-1} \cdot x_4^{n-2} \cdot ... \cdot x_n^2 \cdot x_1} \cdot x_2 + ... + \sqrt[n]{x_1^{n-1} \cdot x_2^{n-2} \cdot ... \cdot x_{n-1}} \cdot x_n}{\sqrt[n]{x_2^{n-1} \cdot x_3^{n-2} \cdot ... \cdot x_n} + \sqrt[n]{x_3^{n-1} \cdot x_4^{n-2} \cdot ... \cdot x_n^2 \cdot x_1} + ... + \sqrt[n]{x_1^{n-1} \cdot x_2^{n-2} \cdot ... \cdot x_{n-1}}} =$$

$$= \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} = G \quad \text{(γεωμετρικός μέσος).}$$

Επίσης αν θέσουμε:

$$r_1 = x_2 x_3 \cdot ... \cdot x_n, \quad r_2 = x_1 x_3 \cdot ... \cdot x_n, \quad ..., \quad r_n = x_1 x_2 \cdot ... \cdot x_{n-1}$$

έχουμε:

$$\frac{r_1x_1 + r_2x_2 + ... + r_nx_n}{r_1 + r_2 + ... + r_n} =$$

$$= \frac{(x_2x_3 \cdot ... \cdot x_n)\cdot x_1 + (x_1x_3 \cdot ... \cdot x_n)\cdot x_2 + ... + (x_1x_2 \cdot ... \cdot x_{n-1})\cdot x_n}{(x_2x_3 \cdot ... \cdot x_n) + (x_1x_3 \cdot ... \cdot x_n) + ... + (x_1x_2 \cdot ... \cdot x_{n-1})} =$$

$$= \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}} = H \quad \text{(αρμονικός μέσος).}$$

Από το παραπάνω θεώρημα προκύπτει ότι ο **σταθμικός** μέσος είναι ο **γενικός** μέσος. Επομένως ο **αριθμητικός**, ο **γεωμετρικός** και ο **αρμονικός** μέσος ν αριθμών είναι ειδικές περιπτώσεις αυτού. Αξίζει να σημειωθεί ακόμη πως η έννοια του σταθμικού μέσου είναι σύμφωνη με την έννοια της **μέσης τιμής** στη Θεωρία Πιθανοτήτων και γενικά με την έννοια της μέσης τιμής.

Παρατηρούμε τώρα ότι αν $x_1, x_2, ..., x_n$ με $n \geq 2$ είναι ν πραγματικοί αριθμοί όπου δεν είναι όλοι ίσοι μεταξύ τους και $l_1, l_2, ..., l_n$ ν θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύει:

$$\min(x_1, x_2, ..., x_n) < \frac{l_1x_1 + l_2x_2 + ... + l_nx_n}{l_1 + l_2 + ... + l_n} < \max(x_1, x_2, ..., x_n)$$

δηλαδή αν $x_1, x_2, ..., x_n$ είναι ν αριθμοί που δεν είναι όλοι ίσοι μεταξύ τους, τότε ο σταθμικός μέσος αυτών με αντίστοιχα βάρη $l_1, l_2, ..., l_n$ είναι ένας αριθμός ανάμεσα στο μικρότερο και στο μεγαλύτερο από αυτούς.

Σύμφωνα με το επόμενο θεώρημα ισχύει και το αντίστροφο του παραπάνω συμπεράσματος, δηλαδή αν έχουμε ν πραγματικούς αριθμούς (ν ≥ 2) που δεν είναι όλοι ίσοι μεταξύ τους, τότε οποιοσδήποτε αριθμός που είναι ανάμεσα στο μικρότερο και στο μεγαλύτερο από αυτούς μπορεί να αποτελέσει σταθμικό μέσο αυτών με κάποια αντίστοιχα βάρη. Έχουμε λοιπόν το θεώρημα:

<u>ΘεώρημαΙΙ:</u> *Έστω* $x_1, x_2, ..., x_n$ με $n \geq 2$ *ν πραγματικοί αριθμοί με* $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$. *Αν* $x_1 < x_n$ *τότε για κάθε* $x_o \in IR$ *με* $x_1 < x_o < x_n$ *υπάρχουν θετικοί πραγματικοί αριθμοί* $l_1, l_2, ..., l_n$ *τέτοιοι ώστε:*

$$x_o = \frac{l_1x_1 + l_2x_2 + ... + l_nx_n}{l_1 + l_2 + ... + l_n}$$

<u>Απόδειξη</u>

Θέτουμε

$$l_2 = l_3 = ... = l_{n-1} = 1 \quad \text{και} \quad l_n = \frac{(n-1)\cdot|x_o - x_1|}{|x_o - x_n|}$$

Θα εκφράσουμε το συντελεστή λ_1 συναρτήσει των λ_i , i = 2, 3, … , ν και των x_j j = 0, 1, … , ν ώστε να ισχύει η ισότητα του συμπεράσματος. Έχουμε:

$$\frac{l_1 x_1 + l_2 x_2 + \ldots + l_n x_n}{l_1 + l_2 + \ldots + l_n} = x_o \Leftrightarrow l_1 x_1 + l_2 x_2 + \ldots + l_n x_n = l_1 x_o + l_2 x_o + \ldots + l_n x_o$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία ισότητα τους αριθμούς λ_i i = 2, 3, …,ν παίρνουμε:

$$l_1 x_1 + x_2 + \ldots + \frac{(n-1)|x_o - x_1|}{|x_o - x_n|} x_n = l_1 x_o + x_o + \ldots + x_o + \frac{(n-1)|x_o - x_1|}{|x_o - x_n|} x_o \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow l_1(x_1 - x_o) = (x_o - x_2) + \ldots + (x_o - x_{n-1}) + \frac{(n-1)|x_o - x_1|}{|x_o - x_n|}(x_o - x_n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow l_1(x_1 - x_o) = (x_o - x_2) + \ldots + (x_o - x_{n-1}) - (n-1)|x_o - x_1| \qquad (6)$$

Προφανώς ισχύει:

$$(x_o - x_2) \leq |x_o - x_1|$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(x_o - x_{\nu-1}) \leq |x_o - x_1|$$

Συνεπώς

$$(x_o - x_2) + \ldots + (x_o - x_{\nu-1}) < (\nu - 1)|x_o - x_1| \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_o - x_2) + \ldots + (x_o - x_{\nu-1}) - (\nu - 1)|x_o - x_1| < 0$$

Επίσης είναι και $x_1 - x_o < 0$, οπότε από την (6) παίρνουμε:

$$\lambda_1 = \frac{(x_o - x_2) + \ldots + (x_o - x_{\nu-1}) - (\nu-1)|x_o - x_1|}{x_1 - x_o} > 0$$

Είναι προφανές τώρα ότι οι αριθμοί $l_1, l_2, \ldots, l_n$ επαληθεύουν την ισότητα του συμπεράσματος και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος.

Παράδειγμα: Έστω οι αριθμοί 3, 4, 6 και 10. Θα βρούμε συντελεστές l_1, l_2, l_3 και l_4 ώστε το 9 να είναι ο σταθμικός μέσος των αριθμών αυτών με συντελεστές βαρύτητας τους αριθμούς l_1, l_2, l_3 και l_4 αντίστοιχα.

Πράγματι, αν θέσουμε $l_2 = l_3 = 1$ και $l_4 = \dfrac{(4-1)\cdot|9-3|}{|9-10|} = 18$, τότε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα θα είναι:

$$l_1 = \frac{(9-4)+(9-6)-18}{3-9} = \frac{5}{3}$$

Εύκολα επαληθεύεται στη συνέχεια ότι ισχύει ο ισχυρισμός μας, δηλαδή:

$$\frac{\frac{5}{3}\cdot 3+1\cdot 4+1\cdot 6+18\cdot 10}{\frac{5}{3}+1+1+18} = \frac{5+4+6+180}{\frac{5+3+3+54}{3}} = \frac{3\cdot 195}{65} = 9$$

Άρα ο σταθμικός μέσος των αριθμών 3, 4, 6 και 10 με συντελεστές βαρύτητας $\frac{5}{3}$, 1, 1 και 18 αντίστοιχα είναι το 9.

<u>Σχόλιο:</u> Το θεώρημα ΙΙ είναι γενικότερο του θεωρήματος Ι, διότι και ο γεωμετρικός μέσος ν θετικών αριθμών, που δεν είναι όλοι ίσοι μεταξύ τους, αλλά και ο αρμονικός μέσος αυτών είναι ανάμεσα στο μικρότερο και στο μεγαλύτερο από αυτούς τους αριθμούς. Επομένως το θεώρημα Ι μπορεί να θεωρηθεί ως πόρισμα του θεωρήματος ΙΙ. Επειδή όμως το θεώρημα Ι αναφέρεται σε δύο πολύ γνωστούς μέσους, χαρακτήρισα την πρόταση αυτή ως θεώρημα.

Ακόμη από τις αποδείξεις των παραπάνω θεωρημάτων προκύπτει ότι οι συντελεστές βαρύτητας των αριθμών $x_1, x_2, ..., x_n$ για κάθε σταθμικό μέσο x_o αυτών δεν είναι μοναδικοί.

<u>Επίλογος</u>

Επειδή μερικά από τα αποτελέσματα της εργασίας αυτής μπορούν να τα παράγουν και οι ίδιοι οι μαθητές με την καθοδήγησή μας, θα μπορούσε να δοθεί η μελέτη ενός μέρους του παραπάνω θέματος ως δημιουργική ερευνητική εργασία σε μαθητές της Β΄ Λυκείου. Μπορούν να παραχθούν και ωραίες ασκήσεις, αντίστοιχες των ασκήσεων της αριθμητικής και της γεωμετρικής προόδου.

Ακόμη η εργασία αυτή μπορεί να αποτελέσει και παράδειγμα για άλλες δημιουργικές ερευνητικές εργασίες, όπου αφορμή για την εκπόνησή τους ίσως αποτελέσουν παρατηρήσεις ή λάθη μαθητών.

Καλό είναι να δίνουμε την ευκαιρία στους μαθητές για εξερεύνηση και πειραματισμό. Με τον αυστηρό και φορμαλιστικό τρόπο διδασκαλίας παρουσιάζεται το τελικό προϊόν, ενώ η πορεία της σκέψης που οδηγεί στο αποτέλεσμα αποκρύπτεται. Αντίθετα η εξερεύνηση και ο πειραματισμός βοηθούν τους μαθητές να γνωρίσουν την ομορφιά και τη γοητεία της έρευνας και της επιστημονικής ανακάλυψης!

Ανάλογο αποτέλεσμα μπορούμε να έχουμε και όταν οργανώνουμε τη διδασκαλία μας με τη μορφή της καθοδηγούμενης ανακάλυψης. Ας μη ξεχνάμε ότι οι μαθητές δεν είναι κενά δοχεία που πρέπει να τα γεμίσουμε με γνώσεις. Είναι προσωπικότητες με κάποιο υπόβαθρο γνώσεων στο οποίο αν στηριχθούν, μπορούν να παράγουν πολλές φορές τη νέα γνώση.

Τέλος, με την εργασία αυτή οι μαθητές θα δουν τον τρόπο και το ρόλο της γενίκευσης μιας έννοιας, ενός τύπου ή ενός θεωρήματος. Έτσι θα κατανοήσουν καλύτερα τη γενική μορφή εξίσωσης ευθείας, τη γενίκευση του Πυθαγορείου Θεωρήματος καθώς και το νόμο των συνημιτόνων που αποτελεί την ενιαία διατύπωση του Πυθαγορείου θεωρήματος και των θεωρημάτων οξείας και αμβλείας γωνίας.

Επίσης, καλό είναι στη Γεωμετρία της Β΄ Λυκείου να λύνουμε και την άσκηση 4 της σελίδας 204, που είναι το θεώρημα Stewart και να καθοδηγούμε κατάλληλα τους μαθητές ώστε να συμπεραίνουν ότι το θεώρημα αυτό αποτελεί γενίκευση του $1^{ου}$ θεωρήματος των διαμέσων.