Το παράδοξο του τροχού του Αριστοτέλη

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

Εισαγωγή

Το παράδοξο του τροχού του Αριστοτέλη διατυπώνεται ως εξής:
Αν στερεώσουμε έναν τροχό πάνω σε έναν άλλον με μεγαλύτερη διάμετρο, ώστε οι δύο τροχοί να έχουν τον ίδιον άξονα περιστροφής, τότε καθώς κυλάει ο μεγάλος τροχός σε ένα επίπεδο φαίνεται να κυλάει και ο μικρός σε παράλληλο επίπεδο. Επειδή ο μικρός τροχός διατρέχει την ίδια απόσταση με τον μεγάλο, δημιουργείται η εντύπωση ότι οι περιφέρειες των δύο τροχών έχουν ίσα μήκη!
Μπορούμε να δούμε και το σχετικό video:

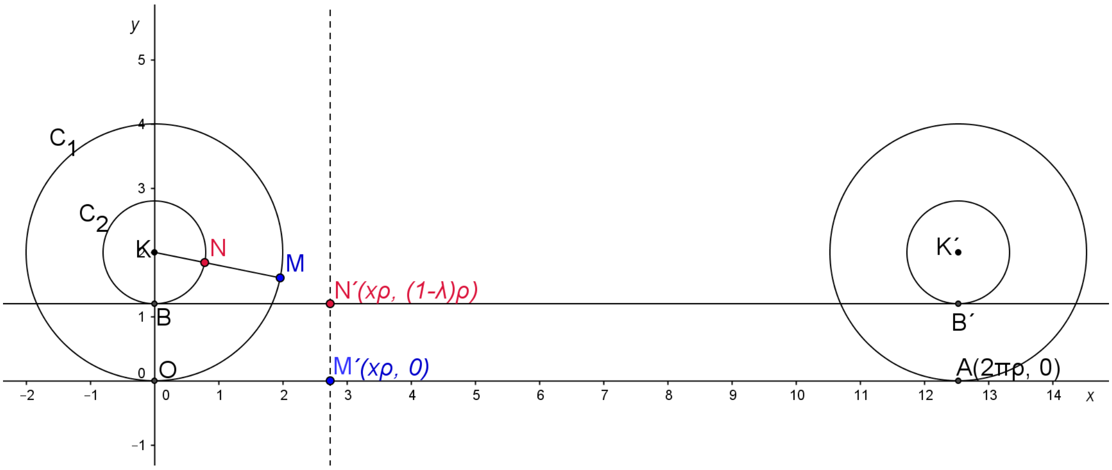
https://youtu.be/mW-0bZwoGwQ?t=12 .

Γιατί δημιουργείται λοιπόν αυτό το παράδοξο;
Πού βρίσκεται η αλήθεια;
Αυτό θα προσπαθήσουμε να διαλευκάνουμε και να εξηγήσουμε στη συνέχεια.

Μελέτη του φαινομένου με την βοήθεια μαθηματικού προτύπου

Θα μελετήσουμε το φαινόμενο δημιουργώντας ένα αντίστοιχο μαθηματικό μοντέλο. Παριστάνουμε τους δύο τροχούς με δύο ομόκεντρους κύκλους και θεωρούμε σύστημα αξόνων ως εξής:

Ως άξονα τετμημένων $x'x$ θεωρούμε την οριζόντια εφαπτομένη του εξωτερικού κύκλου που αφήνει τους δύο κύκλους στο πάνω ημιεπίπεδο και ως άξονα τεταγμένων $y'y$ την κάθετη ευθεία προς τον άξονα $x'x$ που διέρχεται από το κέντρο Κ των δύο κύκλων στην φάση της ηρεμίας, δηλ. πριν αρχίσει η κύλιση (δείτε σχήμα 1). Έτσι ο εξωτερικός κύκλος θα κυλάει πάνω στον άξονα $x'x$.



Σχήμα 1

Έστω ΚΒ = r η ακτίνα του εσωτερικού κύκλου, ΚΟ = ρ η ακτίνα του εξωτερικού και λ ο λόγος των δύο ακτίνων, δηλαδή: $\dfrac{r}{\rho} = \lambda,\ 0 < \lambda < 1$.

Θα μελετήσουμε το φαινόμενο σε μία πλήρη περιστροφή του εξωτερικού κύκλου (δείτε το παραπάνω σχήμα).

Έστω Μ ένα σημείο του κύκλου (Κ, ρ) και έστω ότι το τόξο ΟΜ (το γράφουμε κατά την θετική φορά) είναι x rad, όπου $x \in (0, 2\pi]$. Προφανώς το μήκος του τόξου ΟΜ είναι $x\rho$ μονάδες μήκους.

Κατά την κύλιση το σημείο Μ ταυτίζεται με το σημείο Μ΄($x\rho$, 0) και την ίδια στιγμή το σημείο Ν, που είναι το σημείο τομής του κύκλου (Κ, r) με την ακτίνα ΚΜ του (Κ, ρ), ταυτίζεται με το σημείο Ν΄($x\rho$, (1-λ)ρ).

Αν C_1 είναι ο κύκλος (Κ, ρ) και C_2 ο κύκλος (Κ, r) σύμφωνα με τις παραπάνω αντιστοιχίσεις ορίζονται οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί:

$$\begin{aligned} f\ :\ C_1 &\to \mathrm{OA} \\ \mathrm{M} &\mapsto f(\mathrm{M}) \equiv \mathrm{M}' \end{aligned}$$

και

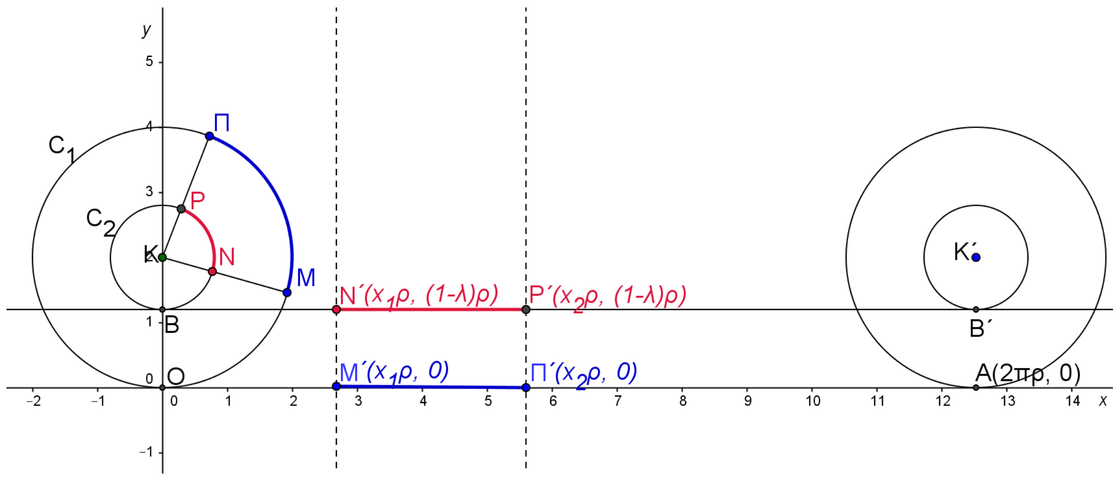
$$\begin{aligned} g\ :\ C_2 &\to \mathrm{BB}' \\ \mathrm{N} &\mapsto g(\mathrm{N}) \equiv \mathrm{N}' \end{aligned}$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι οι μετασχηματισμοί f και g είναι 1-1 και επί των ΟΑ (πλην του Ο)[1] και ΒΒ΄ (πλην του Β)[1] αντίστοιχα.

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι ο μετασχηματισμός f είναι ισομετρία, ενώ ο g όχι (δείτε σχήμα 2).

---

[1] Οι μετασχηματισμοί f και g αναφέρονται στην κύλιση του εξωτερικού κύκλου και μόνο για μία πλήρη περιστροφή και ισχύει f(O) ≡ A και g(B) ≡ B΄.



Σχήμα 2

Έστω δύο σημεία Μ και Π του C_1 και έστω ότι τα τόξα ΟΜ και ΟΠ είναι αντίστοιχα x_1 και x_2 rad με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

$$f(\mathrm{M}) \equiv \mathrm{M}'(x_1\rho,\, 0) \quad \text{και} \quad f(\Pi) \equiv \Pi'(x_2\rho,\, 0).$$

Το μήκος του τόξου ΜΠ είναι ίσο με $x_2\rho - x_1\rho = (x_2 - x_1)\rho$ μονάδες μήκους και το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος Μ΄Π΄ είναι ίσο με $x_2\rho - x_1\rho = (x_2 - x_1)\rho$ μονάδες μήκους. Άρα ο μετασχηματισμός f είναι ισομετρία. Αυτό δικαιολογείται άλλωστε και από την κύλιση του κύκλου C_1 πάνω στον άξονα $x΄x$.

Για τα αντίστοιχα σημεία Ν και Ρ των Μ και Π στον κύκλο C_2 έχουμε:

$$g(\mathrm{N}) \equiv \mathrm{N}'(x_1\rho,\, (1-\lambda)\rho) \quad \text{και} \quad g(\mathrm{P}) \equiv \mathrm{P}'(x_2\rho,\, (1-\lambda)\rho).$$

Το μήκος του τόξου ΝΡ είναι ίσο με $x_2r - x_1r = (x_2 - x_1)r = (x_2 - x_1)\lambda\rho$ μονάδες μήκους, ενώ το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος Ν΄Ρ΄ είναι ίσο με το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος Μ΄Π΄, δηλαδή ίσο με $x_2\rho - x_1\rho = (x_2 - x_1)\rho$ μονάδες μήκους. Παρατηρούμε ότι το μήκος του τόξου ΝΡ είναι μικρότερο από το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος Ν΄Ρ΄. Άρα ο μετασχηματισμός g δεν είναι ισομετρία.

Συμπέρασμα

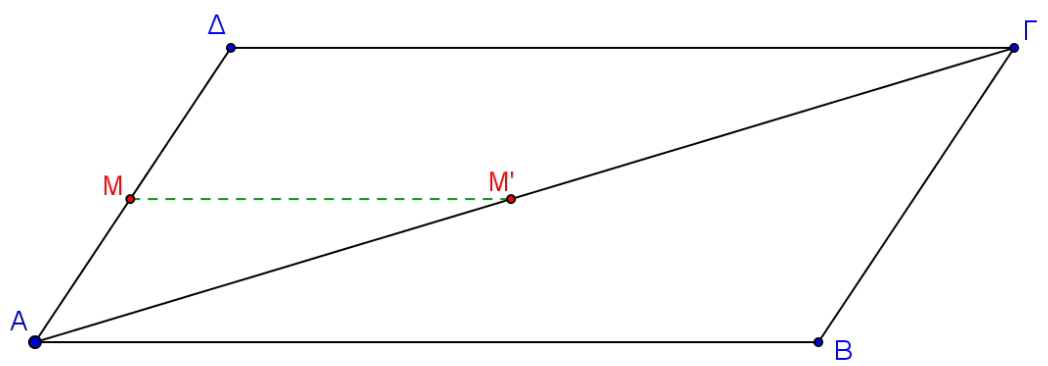
Επειδή κατά την κύλιση του κύκλου C_1 πάνω στον άξονα $x΄x$ ο κύκλος C_2 περιστρέφεται και υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του C_2 και των σημείων του ΒΒ΄ (πλην του Β), δημιουργείται η εντύπωση ότι η μετακίνηση του C_2 οφείλεται σε κύλισή του πάνω στην ευθεία ΒΒ΄. Το γεγονός όμως ότι ο μετασχηματισμός g, που εκφράζει την παραπάνω αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία, δεν είναι ισομετρία αποδεικνύει ότι η μετακίνηση του C_2 δεν οφείλεται σε κύλιση αλλά σε ολίσθηση. Αυτό δίνει την λύση στο μυστήριο του παράδοξου του τροχού του Αριστοτέλη, δηλαδή ο μικρός τροχός δεν μετακινείται με κύλιση, όπως μας δημιουργείται η εντύπωση επειδή περιστρέφεται, αλλά μετακινείται με ολίσθηση. Παρασύρεται από τον μεγάλο τροχό.

Το ότι ο μετασχηματισμός g δεν είναι ισομετρία εξηγείται και με όρους φυσικής ως εξής: Τα μήκη των διαστημάτων του ΒΒ΄ και του ΟΑ κατά την κύλιση του C_1 μεταβάλλονται με ρυθμό ίσο με το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σημείων του C_1, που είναι και το μέτρο της ταχύτητας μετατόπισης του κέντρου Κ των δύο κύκλων, ενώ τα μήκη των τόξων του C_2 μεταβάλλονται με ρυθμό ίσο με το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σημείων του C_2. Ενώ τα σημεία των δύο κύκλων έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα δεν έχουν και την ίδια γραμμική. Τα μέτρα των γραμμικών ταχυτήτων τους έχουν λόγο ίσο με τον λόγο των ακτίνων τους.

Σημείωση: Σύμφωνα με νόμο της Φυσικής κατά την κύλιση ενός τροχού πάνω σε ένα επίπεδο το μέτρο της ταχύτητας μετατόπισης του κέντρου του τροχού είναι ίσο με το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σημείων της περιφέρειάς του. Άμεση συνέπεια αυτού είναι σε μία πλήρη περιστροφή του τροχού το κέντρο του να μετατοπίζεται κατά διάστημα ίσο με το μήκος της περιφέρειάς του. Γι' αυτό λοιπόν ο γεωμετρικός μετασχηματισμός f που ορίζεται παραπάνω είναι ισομετρία. Έτσι λοιπόν, αν η μετακίνηση του κύκλου C_2 οφειλόταν σε κύλιση, τότε το μέτρο της ταχύτητας μετατόπισης του κέντρου του Κ θα ήταν ίσο με το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σημείων του και ο μετασχηματισμός g θα ήταν ισομετρία.

Παρατήρηση

Στο σημείο αυτό γεννιέται το ερώτημα: Πώς είναι δυνατόν να υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων του C_2 και του ΒΒ΄ (εκτός του Β) και τα σχήματα αυτά να μην έχουν το ίδιο μήκος; Η απάντηση είναι απλή. Αυτό αποτελεί χαρακτηριστική ιδιότητα συνόλων με άπειρο πλήθος στοιχείων. Για να πεισθούμε, ας παρατηρήσουμε το παρακάτω σχήμα 3.



Σχήμα 3

Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ του σχήματος αυτού είναι $\hat{\Delta} > 90^o$. Από κάθε σημείο Μ της πλευράς ΑΔ φέρνουμε παράλληλη προς την πλευρά ΓΔ, η οποία τέμνει την διαγώνιο ΑΓ σε ένα σημείο, έστω Μ΄. Η διαδικασία αυτή δημιουργεί μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων της πλευράς ΑΔ και της διαγωνίου ΑΓ (Μ ↔ Μ΄).

Παρατηρούμε λοιπόν ότι υπάρχει μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων των τμημάτων ΑΔ και ΑΓ, ενώ τα τμήματα αυτά δεν έχουν το ίδιο μήκος. Προφανώς ισχύει: ΑΔ < ΑΓ.

Για καλύτερη εποπτεία μπορείτε να δείτε την μικροεφαρμογή GeoGebra:

http://tube.geogebra.org/m/1374233

που δημιούργησα για αυτό το σκοπό, στην οποία υπάρχει η δυνατότητα ολίσθησης της πλευράς ΑΔ, ώστε να ταυτίζονται τα αντίστοιχα σημεία, όπως ακριβώς και στην παραπάνω μετακίνηση του κύκλου C_2 και έτσι να φαίνεται πιο καθαρά η αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των σημείων των τμημάτων ΑΔ και ΑΓ, ενώ ταυτόχρονα είναι εμφανής η διαφορά των μηκών τους.