Οι περιοδικές συναρτήσεις και η περίοδος

Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος κλάδου ΠΕ03
www.p-theodoropoulos.gr

Στο βιβλίο της Άλγεβρας της Β΄ Λυκείου η έννοια της περιοδικής συνάρτησης προσεγγίζεται ως εξής:

Αρχικά δίνονται δύο παραδείγματα με τη βοήθεια των οποίων εισάγεται η έννοια της περιοδικότητας. Το πρώτο παράδειγμα αναφέρεται σε ένα φέρι-μποτ και το δεύτερο σε μια κούνια. Στα παραδείγματα αυτά οι μαθητές παρατηρούν ότι οι τιμές των αντίστοιχων συναρτήσεων επαναλαμβάνονται κάθε 1,5 ώρα στο πρώτο και κάθε 2 sec στο δεύτερο και με αφορμή αυτές τις παρατηρήσεις οδηγούνται στην έννοια της περιοδικότητας. Στη συνέχεια ακολουθεί ο γενικός ορισμός:

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται **περιοδική,** όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός Τ > 0 τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

$$\text{(i)}\quad x+T \in A,\quad x-T \in A$$

και

$$\text{(ii)}\quad f(x+T) = f(x-T) = f(x).$$

Ο πραγματικός αριθμός Τ λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f.

Κατόπιν γίνεται αναφορά στις βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις για τις οποίες από τον τρόπο επέκτασης των ορισμών από τις οξείες γωνίες σε οποιαδήποτε γωνία και τη γενίκευση της έννοιας της γωνίας προκύπτουν τα συμπεράσματα:

«Η συνάρτηση ημίτονο είναι περιοδική με περίοδο 2π».
«Η συνάρτηση συνημίτονο είναι περιοδική με περίοδο 2π».
«Η συνάρτηση εφαπτομένη είναι περιοδική με περίοδο π».
«Η συνάρτηση συνεφαπτομένη είναι περιοδική με περίοδο π».

Είναι φανερό ότι στα παραπάνω συμπεράσματα υπονοείται η βασική περίοδος και αυτό φαίνεται και από τα δύο παραδείγματα, χωρίς όμως να αναφέρεται η έννοια αυτή. Όμως, αυτός ο τρόπος έκφρασης φοβάμαι πως θα δημιουργήσει κάποια σύγχυση στους μαθητές διότι υποδηλώνει μοναδικότητα για την περίοδο, ενώ από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει ότι αν Τ είναι μία περίοδος μιας περιοδικής συνάρτησης f, τότε και κάθε αριθμός κΤ, όπου κ φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του1, θα είναι επίσης περίοδος της f, δηλαδή *μία περιοδική συνάρτηση έχει άπειρες περιόδους*.

Όπως γνωρίζουμε, η ελάχιστη περίοδος μιας περιοδικής συνάρτησης, αν υπάρχει, λέγεται **βασική** ή **πρωτεύουσα** περίοδος (Εξαρχάκος, *Εισαγωγή στα Μαθηματικά*, 1991).

Στον παραπάνω ορισμό σημειώνεται "αν υπάρχει", διότι υπάρχει περίπτωση μια περιοδική συνάρτηση, για παράδειγμα κάθε σταθερή[1] με πεδίο ορισμού το *IR*, να μην έχει βασική περίοδο.

Γι' αυτό λοιπόν για την εισαγωγή της έννοιας της περιοδικής συνάρτησης προτείνω να ακολουθείται η παραπάνω προσέγγιση, αλλά αμέσως μετά τον ορισμό να αναφέρεται ότι: «Η ελάχιστη περίοδος, αν υπάρχει, λέγεται **βασική** ή **πρωτεύουσα** περίοδος». Επίσης, θα πρέπει να συμπληρώνονται και τα παραπάνω συμπεράσματα ως εξής: «Η συνάρτηση ημίτονο είναι περιοδική με βασική περίοδο 2π» κλπ. Ακόμη, κάθε φορά που θα αναφερόμαστε σ' αυτές τις περιόδους καλό είναι να τονίζουμε τον όρο «*<u>βασική περίοδος</u>*».

Τέλος, κατά τη διδασκαλία των περιοδικών συναρτήσεων δεν πρέπει να επεκταθούμε σε δύσκολες θεωρητικές ασκήσεις. Θα περιοριστούμε στις βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις:

$$f(x) = \text{ημ}x,\ \ f(x) = \text{συν}x,\ \ f(x) = \text{εφ}x \ \text{ και } \ f(x) = \text{σφ}x$$

καθώς και στις συναρτήσεις της μορφής:

$$f(x) = \text{ρημω}x \quad \text{και} \quad f(x) = \text{ρσυνω}x.$$

Η έννοια της περιοδικής συνάρτησης δίνεται για να χρησιμοποιηθεί στη μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

[1] Είναι φανερό ότι για κάθε σταθερή συνάρτηση με πεδίο ορισμού το *IR* ικανοποιούνται οι συνθήκες του ορισμού της περιοδικής συνάρτησης. Έτσι λοιπόν κάθε σταθερή συνάρτηση με πεδίο ορισμού το *IR* είναι περιοδική.