

Οι περιοδικές συναρτήσεις και η περίοδος

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος

Σχολικός Σύμβουλος κλάδου ΠΕ03

www.p-theodoropoulos.gr

Στο βιβλίο της Άλγεβρας της Β' Λυκείου η έννοια της περιοδικής συνάρτησης προσεγγίζεται ως εξής:

Αρχικά δίνονται δύο παραδείγματα με τη βοήθεια των οποίων εισάγεται η έννοια της περιοδικότητας. Το πρώτο παράδειγμα αναφέρεται σε ένα φέρι-μποτ, το οποίο εκτελεί ένα δρομολόγιο σε τακτά χρονικά διαστήματα και το δεύτερο σε μια κούνια που αιωρείται. Στα παραδείγματα αυτά οι μαθητές παρατηρούν ότι οι τιμές των αντίστοιχων συναρτήσεων επαναλαμβάνονται κάθε 1,5 ώρα στο πρώτο και κάθε 2 sec στο δεύτερο και οδηγούνται έτσι στην έννοια της περιοδικότητας. Μετά από τις σχετικές παρατηρήσεις και τα σχόλια που γίνονται από τους συγγραφείς του βιβλίου αναφέρεται ο παρακάτω γενικός ορισμός:

Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται **περιοδική**, όταν υπάρχει πραγματικός αριθμός $T > 0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

$$\text{i) } x+T \in A, \quad x-T \in A$$

και

$$\text{ii) } f(x+T) = f(x-T) = f(x).$$

Ο πραγματικός αριθμός T λέγεται **περίοδος** της συνάρτησης f .

Πρέπει να σημειωθεί ότι η έννοια των περιοδικών συναρτήσεων αναφέρεται στο συγκεκριμένο βιβλίο για να χρησιμοποιηθεί στη μελέτη των τριγωνομετρικών συναρτήσεων που ακολουθεί.

Στη μελέτη των βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων μεταξύ άλλων αναφέρονται και τα παρακάτω συμπεράσματα:

«Η συνάρτηση ημίτονο είναι περιοδική με περίοδο 2π ».

«Η συνάρτηση συνημίτονο είναι περιοδική με περίοδο 2π ».

«Η συνάρτηση εφαπτομένη είναι περιοδική με περίοδο π ».

«Η συνάρτηση συνεφαπτομένη είναι περιοδική με περίοδο π ».

Όμως, όπως είναι διατυπωμένα τα συμπεράσματα αυτά θεωρώ πως θα δημιουργήσουν κάποια σύγχυση στους μαθητές, διότι σ' αυτά υποδηλώνεται

μοναδικότητα για την περίοδο, ενώ από τον παραπάνω ορισμό της περιοδικής συνάρτησης προκύπτει εύκολα ότι αν T είναι μία περίοδος μιας περιοδικής συνάρτησης f , τότε και κάθε αριθμός kT , όπου k φυσικός αριθμός μεγαλύτερος της μονάδας θα είναι επίσης περίοδος της f . Δηλαδή μία περιοδική συνάρτηση έχει άπειρες περιόδους.

Τα συμπεράσματα αυτά είναι φανερό ότι αναφέρονται στις βασικές περιόδους των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, χωρίς όμως να αναφέρεται αυτό στο σχολικό βιβλίο. Όπως γνωρίζουμε, η ελάχιστη περίοδος, αν υπάρχει, μιας περιοδικής συνάρτησης f λέγεται **βασική** ή **πρωτεύουσα** περίοδος της f (δείτε Θ. Εξαρχάκου, *Εισαγωγή στα Μαθηματικά*, 1991).

Σημείωση: Στην παραπάνω φράση λέμε: «αν υπάρχει ελάχιστη περίοδος», διότι υπάρχει περίπτωση μία περιοδική συνάρτηση να μην έχει βασική περίοδο. Για παράδειγμα, κάθε σταθερή συνάρτηση με πεδίο ορισμού το IR σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό είναι περιοδική συνάρτηση με περίοδο κάθε θετικό πραγματικό αριθμό χωρίς όμως να έχει ελάχιστη (βασική) περίοδο!

Γι' αυτό λοιπόν για μια ολοκληρωμένη διδασκαλία της έννοιας των περιοδικών συναρτήσεων νομίζω πως είναι καλό ο παραπάνω ορισμός να συμπληρώνεται με την φράση: «Η ελάχιστη περίοδος, αν υπάρχει, λέγεται **βασική** ή **πρωτεύουσα** περίοδος της f ». Και τότε τα παραπάνω συμπεράσματα θα δίνονται σωστά ως εξής:

«Η συνάρτηση ημίτονο είναι περιοδική με βασική περίοδο 2π ».

«Η συνάρτηση συνημίτονο είναι περιοδική με βασική περίοδο 2π ».

«Η συνάρτηση εφαπτομένη είναι περιοδική με βασική περίοδο π ».

«Η συνάρτηση συνεφαπτομένη είναι περιοδική με βασική περίοδο π ».