Τριγωνομετρικές εξισώσεις - Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
πρώην Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στην εργασία αυτή επισημαίνονται και αναλύονται λεπτομέρειες που σχετίζονται με την λύση τριγωνομετρικών εξισώσεων και τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου, τις οποίες καλό είναι να μην αγνοούμε και ιδιαίτερα οι συνάδελφοι που διδάσκουν στη Β΄ Λυκείου.

Α. ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

1. Διερεύνηση

Κατά την επίλυση τριγωνομετρικών εξισώσεων μερικές φορές προκύπτουν εξισώσεις στις οποίες υπάρχει και στα δύο μέλη ο ίδιος άγνωστος όρος, όπως π.χ. η εξίσωση:

$$3x + \frac{\pi}{4} = 2\kappa\pi + 3x - \frac{3\pi}{8}$$

στην οποία εμφανίζεται ο όρος $3x$ και στα δύο μέλη.
Σ’ αυτές τις περιπτώσεις πολλοί διαγράφουν και από τα δύο μέλη τους ίδιους άγνωστους όρους και συμπεραίνουν ότι η αντίστοιχη εξίσωση είναι αδύνατη. Αυτό όμως δεν είναι σωστό. Σε μια τέτοια περίπτωση θα πρέπει να γίνεται διερεύνηση για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\kappa \in Z$, διότι ενδέχεται για κάποια τιμή του κ η εξίσωση αυτή να είναι ταυτότητα. Χαρακτηριστικό είναι το επόμενο παράδειγμα:

<u>**Παράδειγμα**</u>: Να λυθεί η εξίσωση:

$$\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0$$

<u>Λύση</u>

Έχουμε διαδοχικά:

$$\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow \eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x+\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu\left(\frac{2\pi}{3}-x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}=2\kappa\pi+\frac{2\pi}{3}-x \quad \text{ή} \quad x+\frac{\pi}{3}=2\kappa\pi+\pi-\frac{2\pi}{3}+x,\ \kappa\in Z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3} \quad \text{ή} \quad 0x=2\kappa\pi,\ \kappa\in Z.$$

Παρατηρούμε ότι η τελευταία εξίσωση για $\kappa = 0$ είναι ταυτότητα, οπότε και η δοθείσα εξίσωση είναι ταυτότητα.

<u>Σημείωση:</u> Μπορούμε να αποδείξουμε ότι η δοθείσα εξίσωση είναι ταυτότητα και ως εξής:
Επειδή για κάθε $x \in IR$ ισχύει η ισότητα:

$$\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}-x\right) \quad \text{(αντίθετες γωνίες)},$$

η δοθείσα εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:

$$\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}-x\right),$$

η οποία ισχύει για κάθε $x \in IR$, αφού $\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\frac{\pi}{2}$.

2. Πεδίο ορισμού (περιορισμοί)

Όταν το πεδίο ορισμού μιας τριγωνομετρικής εξίσωσης είναι όλο το *IR*, τότε συνήθως δεν γίνεται κάποια σχετική αναφορά. Όταν όμως δεν είναι όλο το *IR*, τότε γίνεται ειδική αναφορά θέτοντας τους γνωστούς περιορισμούς για την μεταβλητή της εξίσωσης. Όμως, στο λυσάρι που δίνεται στους μαθητές δεν γίνεται για όλες τις τριγωνομετρικές εξισώσεις στις οποίες περιέχονται οι συναρτήσεις της εφαπτομένης ή της συνεφαπτομένης πλήρης μελέτη σχετικά με το πεδίο ορισμού και τις λύσεις. Για παράδειγμα, ας δούμε την εξίσωση:

$$\varepsilon\varphi 2x - \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = 0 \qquad (1)$$

(Δείτε άσκηση 1, Β΄ Ομάδας, § 3.5). Στο λυσάρι για την επίλυση της εξίσωσης αυτής ακολουθούνται τα παρακάτω βήματα.

Αρχικά δίνονται ως περιορισμοί για την μεταβλητή x (πεδίο ορισμού της εξίσωσης) οι:

$$\sigma\upsilon\nu 2x \neq 0 \quad \text{και} \quad \eta\mu\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) \neq 0\,.$$

Στη συνέχεια επιλύεται η εξίσωση κατά τα γνωστά και βρίσκεται ο τύπος των λύσεών της που είναι ο εξής:

$$x = \frac{\kappa\pi}{5} + \frac{\pi}{30}, \quad \kappa \in Z$$

και συμπεραίνεται ότι όλες οι τιμές που προκύπτουν από τον παραπάνω τύπο ικανοποιούν τους περιορισμούς της εξίσωσης.

Το ερώτημα όμως είναι:

Πώς συμπεραίνεται ότι όλοι οι αριθμοί που προκύπτουν από τον τύπο των λύσεων της παραπάνω εξίσωσης ικανοποιούν τους αντίστοιχους περιορισμούς, χωρίς να γίνει κάποιος έλεγχος;

Αν στο σχολικό βιβλίο υπήρχε η εξίσωση:

$$\varepsilon\varphi\left(7x - \frac{19\pi}{12}\right) - \sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{4} - 3x\right) = 0 \qquad (2)$$

με περιορισμούς

$$\sigma\upsilon\nu\left(7x - \frac{19\pi}{12}\right) \neq 0 \quad \text{και} \quad \eta\mu\left(\frac{3\pi}{4} - 3x\right) \neq 0$$

και τύπο λύσεων

$$x = \frac{\kappa\pi}{4} + \frac{\pi}{3}, \quad \kappa \in Z$$

θα ισχυρίζονταν άραγε οι συγγραφείς του βιβλίου αυτού χωρίς έλεγχο ότι όλες οι τιμές που προκύπτουν από τον τύπο λύσεων της εξίσωσης αυτής ικανοποιούν τους αντίστοιχους περιορισμούς;

Κάτι τέτοιο θα ήταν μεγάλο λάθος αφού, π.χ. για $\kappa = 1$ ο τύπος λύσεων της ε-ξίσωσης (2), δίνει την τιμή $x_o = \frac{7\pi}{12}$ για την οποία η εξίσωση αυτή δεν ορίζεται, όπως μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε.

Γι' αυτό λοιπόν, στην περίπτωση που δεν είναι προφανές αν οι τιμές που προκύπτουν από τον τύπο ή τους τύπους των λύσεων μιας τριγωνομετρικής εξίσωσης ικανοποιούν ή όχι τους αντίστοιχους περιορισμούς, πρέπει να γίνεται σχολαστικός έλεγχος.
Έτσι, για την εξίσωση (1) πρέπει να γίνει έλεγχος ως εξής:

Οι περιορισμοί

$$\sigma\upsilon\nu 2x \neq 0 \quad \text{και} \quad \eta\mu\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) \neq 0$$

που έχουν τεθεί για την εξίσωση είναι ισοδύναμοι με τους περιορισμούς

$$2x \neq \lambda\pi + \frac{\pi}{2},\ \lambda \in Z \quad \text{και} \quad \frac{\pi}{3} + 3x \neq \lambda\pi,\ \lambda \in Z$$

ή με τους

$$x \neq \frac{\lambda\pi}{2} + \frac{\pi}{4},\ \lambda \in Z \quad \text{και} \quad x \neq \frac{\lambda\pi}{3} - \frac{\pi}{9},\ \lambda \in Z\,.$$

Επίσης, όπως είδαμε, ο τύπος των λύσεων της (1) είναι ο

$$x = \frac{\kappa\pi}{5} + \frac{\pi}{30},\ \ \kappa \in Z\,.$$

Για να δούμε λοιπόν αν όλες οι τιμές που προκύπτουν από τον τύπο λύσεων της εξίσωσης (1) ικανοποιούν τους αντίστοιχους περιορισμούς θα πρέπει να εξετάσουμε αν υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί κ και λ οι οποίοι ικανοποιούν την διοφαντική εξίσωση:

$$\frac{\kappa\pi}{5} + \frac{\pi}{30} = \frac{\lambda\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad \text{ή την} \quad \frac{\kappa\pi}{5} + \frac{\pi}{30} = \frac{\lambda\pi}{3} - \frac{\pi}{9}.$$

Οι παραπάνω διοφαντικές εξισώσεις είναι ισοδύναμες με τις εξισώσεις:

$$12\kappa - 30\lambda = 13 \quad \text{και} \quad 18\kappa - 30\lambda = -13 \text{ αντίστοιχα.}$$

Επειδή οι τελευταίες εξισώσεις είναι αδύνατες (δείτε βιβλίο Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου, § 4.5), συμπεραίνουμε ότι όλες οι τιμές που προκύπτουν από τον τύπο λύσεων της εξίσωσης (1) ικανοποιούν τους αντίστοιχους περιορισμούς και συνεπώς είναι όλες δεκτές.

Σημείωση: Επειδή η εξίσωση αυτή περιέχεται στο σχολικό βιβλίο νομίζω ότι πρέπει να γίνεται ο παραπάνω έλεγχος κατά την επίλυσή της, ώστε να πείθονται οι μαθητές ότι όλες οι τιμές που προκύπτουν από τον τύπο των λύσεών της ικανοποιούν τους αντίστοιχους περιορισμούς. Όμως, δεν μπορούμε να αιτιολογούμε ότι οι δύο τελευταίες διοφαντικές εξισώσεις είναι αδύνατες με την βοήθεια της θεωρίας των γραμμικών διοφαντικών εξισώσεων, αφού την θεωρία αυτή δεν τη γνωρίζουν οι μαθητές. Μπορούμε όμως να το αιτιολογούμε ως εξής: αν υπάρχουν ακέραιοι αριθμοί οι οποίοι ικανοποιούν μία τουλάχιστον από τις δύο τελευταίες εξισώσεις, τότε το πρώτο μέλος της εξίσωσης αυτής θα είναι άρτιος ακέραιος αριθμός ενώ το δεύτερο μέλος είναι περιττός, που είναι άτοπο.

Με όμοιο τρόπο για την εξίσωση (2) προκύπτουν οι διοφαντικές εξισώσεις:

$$7\kappa - 4\lambda = -1 \qquad \text{και} \qquad 3\kappa - 4\lambda = -1$$

οι οποίες (και οι δύο) έχουν λύση (δείτε βιβλίο Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Β΄ Λυκείου, § 4.5). Μία λύση π.χ. της πρώτης είναι το ζεύγος $(\kappa, \lambda) = (1, 2)$ και της δεύτερης το ζεύγος $(\kappa, \lambda) = (1, 1)$. Γι' αυτό για $x_o = \frac{7\pi}{12}$ που προκύπτει από τον τύπο λύσεων της εξίσωσης (2) για $\kappa = 1$ η εξίσωση αυτή δεν ορίζεται. Εδώ, η αιτιολόγηση ότι οι παραπάνω διοφαντικές εξισώσεις έχουν λύση χωρίς την βοήθεια της θεωρίας των γραμμικών διοφαντικών εξισώσεων είναι πιο σύνθετη διαδικασία από αυτή που είδαμε για την εξίσωση (1) και γι' αυτό παραλείπεται.

Γενικά θεωρώ ότι δεν θα πρέπει να δίνονται τριγωνομετρικές εξισώσεις για λύση στους μαθητές της Β΄ Λυκείου για τις οποίες απαιτείται πολύπλοκος έλεγχος. Καλύτερα να δίνουμε εξισώσεις για τις οποίες ο έλεγχος είναι προφανής, όπως π.χ. η εξίσωση:

$$\varepsilon\varphi x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - \sigma\upsilon\nu x = 0 \qquad (3)$$

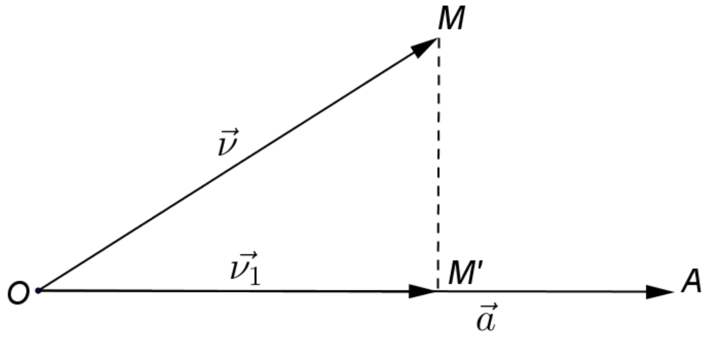
Η εξίσωση αυτή με τον περιορισμό $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\eta\mu x(1 + \eta\mu x) = 0$, της οποίας οι λύσεις είναι οι λύσεις των εξισώσεων

$$\eta\mu x = 0 \qquad \text{και} \qquad \eta\mu x = -1.$$

Είναι προφανές ότι οι λύσεις της τελευταίας εξίσωσης δεν ικανοποιούν τον περιορισμό $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$ και έτσι απορρίπτονται για την εξίσωση (3).

Β. ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Αν ένας μαθητής σε μια σχετική άσκηση βρει την προβολή $\vec{v}_1$ ενός διανύσματος $\vec{v}$ πάνω σε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ως εξής:



$$\vec{a}\cdot\vec{v}_1=\vec{a}\cdot\vec{v} \Leftrightarrow (\vec{a}\cdot\vec{v}_1)\cdot\vec{a}=(\vec{a}\cdot\vec{v})\cdot\vec{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}\cdot(\vec{v}_1\cdot\vec{a})=(\vec{a}\cdot\vec{v})\cdot\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{v}_1)=(\vec{a}\cdot\vec{v})\cdot\vec{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\vec{a}\cdot\vec{a})\cdot\vec{v}_1=(\vec{a}\cdot\vec{v})\cdot\vec{a} \Leftrightarrow \vec{a}^2\cdot\vec{v}_1=(\vec{a}\cdot\vec{v})\cdot\vec{a} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{v}_1=\frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{\vec{a}^2}\cdot\vec{a}$$

τι θα πούμε σ' αυτόν τον μαθητή; Ο τρόπος που ακολουθεί είναι σωστός;

Παρατηρούμε ότι ο μαθητής αυτός στο πρώτο μέλος της ισότητας χρησιμοποιεί μία ιδιότητα, η οποία θυμίζει την προσεταιριστική, σε συνδυασμό με την αντιμεταθετική, ενώ γνωρίζουμε ότι η προσεταιριστική ιδιότητα δεν ισχύει για το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων. Πρέπει να σημειωθεί ότι η προσεταιριστική ιδιότητα αναφέρεται σε εσωτερικές διμελείς πράξεις και το εσωτερικό γινόμενο δεν είναι εσωτερική πράξη στο σύνολο των διανυσμάτων.

Αποδεικνύεται όμως ότι για τρία μη μηδενικά συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ ισχύει πάντα η ισότητα

$$(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})\cdot\vec{\gamma}=\vec{\alpha}\cdot(\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma})$$

ενώ αν ένα τουλάχιστον από τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι το μηδενικό, τότε ισχύει σε κάθε περίπτωση.

Άρα από μαθηματική άποψη ο τρόπος του μαθητή είναι σωστός. Για να θεωρηθεί όμως πλήρης θα πρέπει να αποδειχθεί και η παραπάνω ιδιότητα, την οποία χρησιμοποιεί.