Γιατί να μην λύνουμε και τις άρρητες εξισώσεις με την διαδικασία των ισοδύναμων εξισώσεων;

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

Μία άρρητη εξίσωση με έναν άγνωστο, όπως και κάθε εξίσωση, είναι ένας προτασιακός τύπος με κατηγόρημα την σχέση της ισότητας. Το πεδίο ορισμού της εξίσωσης, το οποίο θα πρέπει να βρίσκουμε, είναι το σύνολο αναφοράς αυτού του προτασιακού τύπου. Επιλύοντας την εξίσωση βρίσκουμε το σύνολο αλήθειας του εν λόγω προτασιακού τύπου, το οποίο πρέπει να είναι υποσύνολο του συνόλου αναφοράς.

Πολλοί συνάδελφοι απορούν και ρωτούν γιατί να μην λύνουμε στη Β΄ Λυκείου και τις άρρητες εξισώσεις με την διαδικασία των ισοδύναμων εξισώσεων. Αν θέλουμε, μπορούμε να λύνουμε και τις άρρητες εξισώσεις με την διαδικασία των ισοδύναμων εξισώσεων. Θα πρέπει όμως σε κάποιο ή κάποια βήματα να τίθενται και επιπλέον περιορισμοί για την μεταβλητή, ώστε να ισχύει η ισοδυναμία και αυτό καθιστά την διαδικασία πολύ φορμαλιστική και ίσως δυσνόητη για μερικούς μαθητές. Γι' αυτό λοιπόν ο τρόπος που προτείνεται στο σχολικό βιβλίο, ο οποίος στηρίζεται σε απλές αληθείς συνεπαγωγές, κάνει την διαδικασία πιο απλή και <u>από παιδαγωγική άποψη θεωρώ ότι είναι πιο σωστός.</u>

Όμως, με την διαδικασία αυτή οι εξισώσεις που προκύπτουν δεν είναι ισοδύναμες και γι' αυτό πρέπει να ελέγχουμε αν επαληθεύουν και την δοθείσα εξίσωση οι λύσεις που βρίσκουμε. Από την Μαθηματική Λογική γνωρίζουμε ότι σε μια αληθή συνεπαγωγή μπορεί να έχουμε ψευδή υπόθεση και αληθές συμπέρασμα. Αυτό παρατηρείται και στην επίλυση άρρητων εξισώσεων με απλές συνεπαγωγές. Δηλαδή υπάρχει περίπτωση κάποια ή κάποιες ρίζες της τελικής εξίσωσης να μην επαληθεύει/ουν και την αρχική. Βέβαια οι μαθητές δεν έχουν γνώσεις Μαθηματικής Λογικής και αυτό ίσως δημιουργήσει κάποιο διδακτικό εμπόδιο, το οποίο με απλά παραδείγματα μπορεί να υπερπηδηθεί.

Στο ερώτημα, τώρα, που επίσης θέτουν κάποιοι συνάδελφοι, αν πρέπει να βρίσκουμε και το πεδίο ορισμού μιας άρρητης εξίσωσης, μπορούμε να απαντήσουμε με την βοήθεια της Μαθηματικής Λογικής ως εξής:
Κατά την επίλυση μιας άρρητης εξίσωσης με απλές συνεπαγωγές σχηματίζεται άτυπα μία λογική πρόταση με καθολικό ποσοδείκτη της μορφής:

$$(\forall x \in \Omega)\left[p(x) \to q(x) \right] \ \text{(Ω το πεδίο ορισμού της εξίσωσης)},$$

η οποία πρέπει να έχει τιμή αλήθειας ίση με 1. Δηλαδή πρέπει:

$$\left\|(\forall x \in \Omega)\left[p(x) \to q(x)\right]\right\| = \bigwedge_{x_o \in \Omega} \left\|p(x_o) \to q(x_o)\right\| = 1$$

που σημαίνει ότι για κάθε $x_o \in \Omega$ η πρόταση $p(x_o)$ είναι ψευδής ή η $q(x_o)$ αληθής.

Δείτε: http://www.p-theodoropoulos.gr/ergasies/mathimat-ypothprot.pdf

(*Υποθετικές προτάσεις και λογική αλήθεια*).