Μπορούν οι μαθητές να χρησιμοποιούν χωρίς απόδειξη ότι η γραφική παράσταση μιας κυρτής ή κοίλης συνάρτησης με ασύμπτωτη στο +∞ ή - ∞ είναι πάνω ή κάτω αντίστοιχα από την ασύμπτωτη;

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

Οι μαθητές αντιλαμβάνονται διαισθητικά ότι αν έχουμε μια συνάρτηση f η οποία είναι κυρτή ή κοίλη σε κάποιο διάστημα της μορφής (-∞, β) ή (α, +∞) και η γραφική της παράσταση έχει ασύμπτωτη στο -∞ ή στο +∞ αντίστοιχα, τότε η ασύμπτωτη αυτή αποτελεί οριακή ευθεία των εφαπτομένων της C_f στο αντίστοιχο διάστημα, δηλαδή όταν το x τείνει στο -∞ ή στο +∞ αντίστοιχα, τότε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(x, f(x))$ τείνει να ταυτιστεί με την ασύμπτωτη. Έτσι λοιπόν στο ίδιο διάστημα όποια είναι η σχετική θέση της C_f με κάθε εφαπτομένη θα είναι και η σχετική θέση της C_f με την ασύμπτωτη (μόνο κοινό σημείο δεν θα έχουν).

Ο παραπάνω ισχυρισμός αποδεικνύεται εύκολα. Για παράδειγμα, αν μία συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα της μορφής (α, +∞) και η C_f έχει στο +∞ πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία με εξίσωση $y = \lambda x + \beta$, τότε αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \overset{\left(\frac{\pm\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lambda \qquad \text{και} \qquad \lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - f'(x)\cdot x\right] = \beta .$$

Υπενθυμίζεται ότι ως εφαπτομένη της C_f σε ένα σημείο της $(x_o, f(x_o))$ όταν η f παραγωγίζεται στο x_o ορίζεται η ευθεία:

$$y - f(x_o) = f'(x_o)\cdot(x - x_o) \quad \text{ή} \quad y = f'(x_o)\cdot x + \left(f(x_o) - f'(x_o)\cdot x_o\right).$$

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ο ισχυρισμός και για τις άλλες περιπτώσεις πλάγιας ασύμπτωτης καθώς και για την περίπτωση οριζόντιας ασύμπτωτης.

Ας δούμε δύο παραδείγματα στα οποία εφαρμόζονται οι παραπάνω ισχυρισμοί:

<u>Παράδειγμα 1ο:</u> Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2x^2}{x+1}$.

Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα (-∞, -1) και κυρτή στο (-1, +∞). Επίσης, αποδεικνύεται ότι η C_f και στο -∞ και στο +∞ έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία:

$$y = 2x - 2 \quad (\lambda = 2 \quad \text{και} \quad \beta = \text{-}2).$$

Παρατηρούμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 4x}{(x+1)^2}$ και ότι ισχύει:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 2 \ \ (=\lambda).$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι $f(x) - f'(x)\cdot x = \dfrac{-2x^2}{(x+1)^2}$, οπότε:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - f'(x)\cdot x \right] = \text{-}2 \ \ (=\beta).$$

<u>Παράδειγμα 2^ο^:</u> Έστω η συνάρτηση $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

Αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα (-∞, 0) και κυρτή στο (0, +∞). Επίσης, αποδεικνύεται ότι η C_f και στο -∞ και στο +∞ έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία:

$$y = x + 1 \quad (\lambda = 1 \quad \text{και} \quad \beta = 1).$$

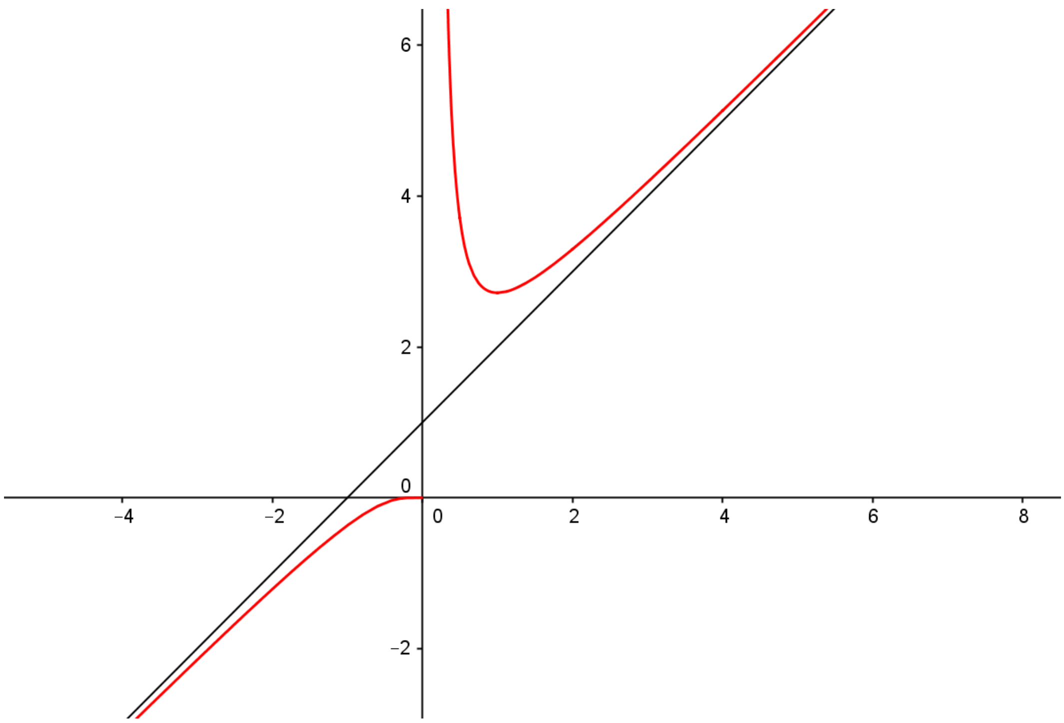
Παρατηρούμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{x-1}{x}$ και ότι ισχύει:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f'(x) = 1 \ \ (=\lambda).$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι $f(x) - f'(x)\cdot x = e^{\frac{1}{x}}$, οπότε:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - f'(x)\cdot x \right] = 1 \ \ (=\beta).$$

Εποπτικά η C_f καθώς και η πλάγια ασύμπτωτή της στο +∞ και στο -∞ φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Η σχετική θέση των δύο γραμμών, δηλαδή της C_f και της ασύμπτωτης, απαιτείται κυρίως σε ασκήσεις υπολογισμού του εμβαδού ενός χωρίου που οριοθετείται μεταξύ άλλων γραμμών και από αυτές τις δύο. Όμως, επειδή δεν αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο η σχετική θέση των δύο γραμμών, καλό είναι να αποδεικνύεται σε κάθε περίπτωση, είτε αλγεβρικά είτε με τη βοήθεια της Ανάλυσης. Αν, όμως, κάποιος μαθητής θεωρήσει διαισθητικά ως δεδομένη την σχετική τους θέση σύμφωνα με τα παραπάνω, τότε νομίζω ότι αυτό θα πρέπει να γίνει αποδεκτό.

Σημείωση-υπόδειξη: Μπορούμε να δώσουμε και άλλη απόδειξη για την σχετική θέση των δύο αυτών γραμμών αποδεικνύοντας αρχικά για οριζόντια ασύμπτωτη και στη συνέχεια στηριζόμενοι σ' αυτήν την απόδειξη να επεκτείνουμε την απόδειξη και στην περίπτωση πλάγιας ασύμπτωτης. Η επέκταση στηρίζεται και στην παρακάτω παρατήρηση-πρόταση:

Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη σε ένα διάστημα της μορφής ($-\infty$, β) ή (α, $+\infty$) και η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ ή στο $+\infty$ αντίστοιχα την ευθεία $y = \lambda x + \beta$, τότε και η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \lambda x$ θα είναι επίσης κυρτή ή κοίλη στο αντίστοιχο διάστημα και θα έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = \beta$.