Γιατί η τιμή της παράστασης $OP^2 – R^2$ ονομάζεται δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O, R);

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

Η δύναμη ενός σημείου P ως προς έναν κύκλο (O, R) είναι μία σημαντική έννοια της Γεωμετρίας. Ας θυμηθούμε την πληθώρα και την ποικιλία των σχετικών ασκήσεων καθώς και τις σημαντικές εφαρμογές της. Για να απαντηθεί, τώρα, το παραπάνω ερώτημα πρέπει να δούμε τη χρήση και την εξέλιξη του όρου «δύναμη» στα Μαθηματικά.

Όπως προκύπτει από διάφορα αρχαία συγγράμματα, τον όρο «δύναμη» τον χρησιμοποιούσαν οι αρχαίοι έλληνες μαθηματικοί[1] με την έννοια της «τιμής» ή της «αξίας». Με αυτήν την έννοα θεωρώ ότι χρησιμοποιείται και σήμερα όταν, για παράδειγμα, λέμε ότι δύο κλάσματα που έχουν την ίδια αξία είναι ισοδύναμα ή όταν δύο σχήματα που έχουν το ίδιο εμβαδόν τα λέμε ισοδύναμα.

Με την πάροδο του χρόνου ο όρος «δύναμη» σήμαινε το εμβαδόν ενός τετραγώνου και στη συνέχεια ταυτίστηκε με την έννοια του ίδιου του τετραγώνου. Γνωρίζουμε ότι ένα κυρτό πολύγωνο μετασχηματίζεται σε ένα τετράγωνο με το ίδιο εμβαδόν (τετραγωνισμός του πολυγώνου). Έτσι λοιπόν, δύο ισεμβαδικά κυρτά πολύγωνα έχουν το ίδιο εμβαδόν με το ίδιο τετράγωνο, δηλαδή έχουν την ίδια «δύναμη», γι’ αυτό τα λέμε και ισοδύναμα.

Στην άλγεβρα, ο όρος «δύναμη» όπως τον ξέρουμε, είναι πολύ πιθανό να καθιερώθηκε ως εξής: Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς α είναι ίσο με $\alpha\cdot\alpha$ (σύντομα α^2). Έτσι λοιπόν η τιμή της παράστασης $\alpha\cdot\alpha$ και συνεπακόλουθα και της α^2 ονομαζόταν δύναμη. Κατ’ επέκταση σήμερα κάθε γινόμενο της μορφής α^ρ, όπου $\rho \in IR$ λέγεται δύναμη.

Στη Γεωμετρία, τώρα, έστω P ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου (O, R). Αν PAB είναι μία τέμνουσα και PE ένα εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου αυτού, τότε όπως γνωρίζουμε ισχύει: $PA\cdot PB = PE^2 = OP^2 - R^2$. Αυτό σημαίνει ότι για οποιαδήποτε τέμνουσα PAB του κύκλου τα ορθογώνια με διαστάσεις PA και PB έχουν το ίδιο εμβαδόν με το τετράγωνο πλευράς PE, δηλαδή όλα αυτά τα ορθογώνια έχουν την ίδια «δύναμη», που εξαρτάται μόνο από την θέση του σημείου P. Γι’ αυτό λοιπόν η τιμή της παράστασης $OP^2 - R^2$ ονομάζεται δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O, R).

---

[1] Δείτε και: http://www.hdml.gr/pdfs/journals/1290.pdf

Όμοια, αν P είναι ένα εσωτερικό σημείο του κύκλου (O, R) και APB οποιαδήποτε τέμνουσα του κύκλου αυτού, τότε ισχύει $PA \cdot PB = R^2 - OP^2$. Δηλαδή για οποιαδήποτε τέμνουσα APB τα ορθογώνια με διαστάσεις PA και PB έχουν το ίδιο εμβαδόν με το τετράγωνο που έχει πλευρά το ½ της χορδής του κύκλου που διέρχεται από το P και είναι κάθετη στην OP. Γι' αυτό, θα ταίριαζε στην περίπτωση αυτή να ονομάζεται δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O, R) η τιμή της παράστασης $R^2 - OP^2$. Να σημειωθεί ότι μερικοί συγγραφείς, όπως οι Δ. Κοντογιάννης και Β. Ντζιαχρήστος στο βιβλίο «*ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ*» (Αθήνα 1999), για εσωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O, R) ορίζουν ως δύναμη του P ως προς τον κύκλο (O, R) την τιμή της παράστασης $R^2 - OP^2$.

Όμως στα περισσότερα βιβλία, όπως και στο σχολικό, για την έννοια της δύναμης σημείου ως προς κύκλο κυριαρχεί ο παρακάτω ορισμός στον οποίον παρατηρείται ενιαία διατύπωση.

<u>Ορισμός</u>: Αν (O, R) είναι ένας κύκλος και P ένα οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου του, τότε η τιμή της παράστασης $OP^2 - R^2$ ονομάζεται δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O, R) και συμβολίζεται με $\Delta^{P}_{(O,R)}$, δηλαδή έχουμε:

$$\Delta^{P}_{(O,R)} = OP^2 - R^2.$$

Σ' αυτό συνηγορεί και ο *Διανυσματικός Λογισμός* καθώς και η *Αναλυτική Γεωμετρία* που, όπως θα δούμε παρακάτω, δίνουν ενιαίες εκφράσεις για την παραπάνω έννοια.

Α. Διανυσματική έκφραση

Αν P είναι ένα σημείο του επιπέδου ενός κύκλου (O, R), είτε εσωτερικό είτε εξωτερικό του κύκλου, τότε για οποιαδήποτε ευθεία που διέρχεται από το P και τέμνει τον κύκλο στα σημεία A και B το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{PA}$ και $\overrightarrow{PB}$ είναι σταθερό και ίσο με $\delta^2 - R^2$, όπου δ = (OP), δηλαδή ισχύει:

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \delta^2 - R^2.$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή του εσωτερικού γινομένου $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ για οποιοδήποτε σημείο P του επιπέδου του κύκλου (είτε είναι εσωτερικό του κύκλου, είτε εξωτερικό, είτε και πάνω στον κύκλο) είναι ίση με την δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O, R), σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό.

Να σημειωθεί ότι στον αξιωματικό τρόπο θεμελίωσης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που πρότεινε ο H. Weyl η έννοια του διανύσματος είναι πρωταρχική.

Β. Αναλυτική έκφραση

Αν $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ είναι η αναλυτική εξίσωση ενός κύκλου (K, R) στο καρτεσιανό επίπεδο xOy, τότε για κάθε σημείο $P(x_o, y_o)$ του καρτεσιανού επιπέδου, είτε είναι εσωτερικό του κύκλου, είτε εξωτερικό, είτε πάνω στον κύκλο, αποδεικνύεται ότι ισχύει:

$$x_o^2 + y_o^2 + \mathrm{A}x_o + \mathrm{B}y_o + \Gamma = \delta^2 - \mathrm{R}^2,$$

όπου $\delta = (\mathrm{KP})$.

Και εδώ παρατηρούμε ότι η τιμή της παράστασης $x_o^2 + y_o^2 + \mathrm{A}x_o + \mathrm{B}y_o + \Gamma$ για οποιοδήποτε σημείο P του επιπέδου του κύκλου είναι ίση με την δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O, R), σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό.

<u>Σημείωση:</u> Ο όρος «δύναμη σημείου ως προς κύκλο» εισήχθη στα Μαθηματικά τον 18$^{\text{ο}}$ ή 19$^{\text{ο}}$ αιώνα. Στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη, στο βιβλίο 3 και στις προτάσεις 35 και 36 αναφέρονται τα θεωρήματα που σχετίζονται με τις ευθείες που τέμνουν έναν κύκλο και διατυπώνονται ως εξής:

Βιβλίο 3 (Γ΄), πρόταση 35 (λε΄)

Ἐὰν ἐν κύκλῳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὸ ὑπὸ τῶν τῆς μιᾶς τμημάτων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας τμημάτων περιεχομένῳ ὀρθογωνίῳ.

Βιβλίο 3 (Γ΄), πρόταση 36 (λς΄)

Ἐὰν κύκλου ληφθῇ τι σημεῖον ἐκτός, καὶ ἀπ' αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον προσπίπτωσι δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν τέμνῃ τὸν κύκλον, ἡ δὲ ἐφάπτηται, ἔσται τὸ ὑπὸ ὅλης τῆς τεμνούσης καὶ τῆς ἐκτὸς ἀπολαμβανομένης μεταξὺ τοῦ τε σημείου καὶ τῆς κυρτῆς περιφερείας ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετραγώνῳ.