Η έννοια της ρίζας στα Μαθηματικά και η χρήση του συμβόλου $\sqrt[\nu]{\ }$ της νιοστής ρίζας

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

Ο όρος **ρίζα** στα Μαθηματικά αναφέρεται σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις με ανάλογες σημασίες, οι οποίες όμως, όπως θα δούμε παρακάτω, συσχετίζονται μεταξύ τους. Οι περιπτώσεις αυτές είναι: α) **ρίζα μιας εξίσωσης** (root of an equation), β) **ρίζα ενός αριθμού** (root of a number) και γ) **ρίζα ενός πολυωνύμου** (root of a polynomial).

- **Ρίζα**[1] **μιας εξίσωσης** $\boldsymbol{F(x) = 0}$ με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Κ ονομάζεται κάθε στοιχείο r του Κ που επαληθεύει την εξίσωση αυτή, δηλαδή που ισχύει $F(r) = 0$.

- Αν **α** είναι ένας μιγαδικός αριθμός και **ν** ένας φυσικός αριθμός διάφορος του μηδενός, τότε οι ρίζες της εξίσωσης $\boldsymbol{z^{\nu} - \alpha = 0}$ λέγονται και **νιοστές ρίζες του μιγαδικού αριθμού α.**

- **Ρίζα ενός πολυωνύμου** $\boldsymbol{P(x)}$ **του** $\boldsymbol{x}$ με σύνολο αναφοράς ένα σύνολο Κ ονομάζεται κάθε στοιχείο ρ του Κ που μηδενίζει το πολυώνυμο $P(x)$, δηλαδή που ισχύει $P(\rho) = 0$.
  Παρατηρούμε ότι μία ρίζα ρ ενός πολυωνύμου $P(x)$ είναι ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης $P(x) = 0$.

Αποδεικνύεται ότι κάθε μιγαδικός αριθμός $\alpha \neq 0$ έχει ν διαφορετικές νιοστές ρίζες οι εικόνες των οποίων στο μιγαδικό επίπεδο για κάθε $\nu > 2$ αποτελούν κορυφές κανονικού πολυγώνου με ν πλευρές.

Αν $a = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ είναι μια τριγωνομετρική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού $\alpha \neq 0$, όπου ρ το μέτρο του και θ ένα όρισμά του, τότε οι ν διαφορετικές νιοστές ρίζες του α δίνονται από τον τύπο:

---

[1] Λαμβάνοντας υπόψη την διαθεματικότητα της έννοιας της ρίζας πιστεύω πως ο όρος "ρίζα" καθιερώθηκε στα Μαθηματικά όπως τον ξέρουμε, μάλλον επειδή η έννοια της ρίζας μιας εξίσωσης αποτελεί την βασική, την κεντρική ιδέα της εξίσωσης, δηλαδή δεν θα είχε νόημα η έννοια της εξίσωσης χωρίς την έννοια της ρίζας. Με άλλα λόγια η έννοια της ρίζας στηρίζει την έννοια της εξίσωσης. Να σημειωθεί ότι ο όρος "ρίζα" για τη λύση μιας εξίσωσης δεν χρησιμοποιείται μόνο στην ελληνική βιβλιογραφία, αλλά διεθνώς. Για παράδειγμα, σε βιβλίο διεθνούς εμβέλειας (έκδοση Barron's) που απευθύνεται σε μαθητές της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης αναφέρεται ο ορισμός: «*Root (or solution) of an equation is a number that makes the equation true when used in place of the variable*».

$$z_\kappa = \sqrt[\nu]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu} + i\sin\frac{\theta+2\kappa\pi}{\nu}\right),\ \kappa = 0,\,1,\,\ldots,\,\nu-1. \quad (1)$$

(Δείτε βιβλίο Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου, § 2.5 Α΄ Μέρους, σελ. 117 (έκδοση 2014)).

Όμως στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου θεωρώ πως υπάρχει μια σύγχυση σχετικά με τον ορισμό της νιοστής ρίζας ενός μη αρνητικού πραγματικού αριθμού και τη χρήση του συμβόλου $\sqrt[\nu]{\ }$. Στο συγκεκριμένο βιβλίο στην § 2.4, σελ. 70, (έκδοση 2014) αναφέρεται ο παρακάτω ορισμός:

«*Η **ν-οστή ρίζα** ενός <u>μη αρνητικού</u> αριθμού **α** συμβολίζεται με* $\sqrt[\nu]{a}$ *και είναι ο <u>μη αρνητικός αριθμός</u>[2] που, όταν υψωθεί στην **ν**, δίνει τον **α***».

Δημιουργείται λοιπόν το εξής παράδοξο. Αν δούμε έναν μη αρνητικό πραγματικό αριθμό ***α*** ως μιγαδικό αριθμό, τότε ως νιοστή ρίζα του ***α*** ορίζεται <u>κάθε αριθμός</u> που, όταν υψωθεί στην ν, δίνει τον ***α*** (Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου). Αν ο ν είναι άρτιος, τότε για τον αριθμό ***α*** υπάρχουν δύο νιοστές πραγματικές ρίζες που είναι δύο αντίθετοι πραγματικοί αριθμοί. Σύμφωνα όμως με τον παραπάνω ορισμό του βιβλίου της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου ως νιοστή ρίζα του ***α*** ορίζεται μόνο <u>ο μη αρνητικός αριθμός</u> που έχει αυτή την ιδιότητα!

Νομίζω πως η σύγχυση αυτή δημιουργείται λόγω της χρήσης του συμβόλου $\sqrt[\nu]{\ }$. Άλλο θέμα είναι η νιοστή ρίζα ενός αριθμού ως έννοια και άλλο ο συμβολισμός. Απλά, αν ***α*** είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός, τότε με το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\ }$ παριστάνεται η μη αρνητική νιοστή ρίζα του ***α***, π.χ. $\sqrt[4]{81} = 3$.

Το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\ }$ πρέπει να έχει συναρτησιακό χαρακτήρα δηλαδή μονοσήμαντο αποτέλεσμα, ώστε να μπορεί να χρησιμοποιείται και σε παραστάσεις. Γι' αυτό συμφωνήθηκε με το σύμβολο αυτό να παριστάνεται μόνο η μη αρνητική νιοστή ρίζα ενός μη αρνητικού πραγματικού αριθμού και είναι λάθος να ταυτίζεται η έννοια της νιοστής ρίζας ενός αριθμού με το σύμβολο αυτό.

Σύμφωνα με τα παραπάνω κάθε μιγαδικός αριθμός διάφορος του μηδενός έχει δύο τετραγωνικές ρίζες που είναι δύο αντίθετοι μιγαδικοί αριθμοί. Για παράδειγμα, οι τετραγωνικές ρίζες του μιγαδικού 5 – 12i είναι οι αριθμοί 3 – 2i και -3 + 2i . Αυτό ισχύει φυσικά και για τους πραγματικούς αριθμούς, αφού το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι υποσύνολο του συνόλου των μιγαδικών. Π.χ. οι τετραγωνικές ρίζες του 25 είναι οι αριθμοί 5 και -5. Με το σύμβολο $\sqrt{\ }$ της τετραγωνικής ρίζας παριστάνεται μόνο η θετική τετραγωνική ρίζα του 25, δηλαδή γράφουμε $\sqrt{25} = 5$.

Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι:

Μπορεί να χρησιμοποιείται το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\ }$ γενικότερα για κάθε μιγαδικό αριθμό;

[2] "Αποδεικνύεται ότι υπάρχει και είναι μοναδικός".

Εάν η διεθνής μαθηματική κοινότητα συμφωνήσει να επεκταθεί η χρήση του συμβόλου $\sqrt[\nu]{\ }$ και για μιγαδικούς αριθμούς, τότε μπορεί να χρησιμοποιείται. Προσωπικά δεν γνωρίζω αν έχει συμφωνηθεί κάτι τέτοιο. Βλέπω όμως ότι σε κάποια πανεπιστημιακά συγγράμματα το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\ }$ χρησιμοποιείται και για μιγαδικούς αριθμούς και μάλιστα χωρίς μονοσήμαντο χαρακτήρα!

Αν συμφωνηθεί να χρησιμοποιείται το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\ }$ και για μιγαδικούς αριθμούς, τότε για κάθε μιγαδικό αριθμό α ≠ 0 θα πρέπει με το σύμβολο αυτό να παριστάνεται <u>αποκλειστικά και μόνο</u> η νιοστή ρίζα του α για $\kappa = 0$ στον παραπάνω τύπο (1). Αυτό, για να είναι η γενίκευση της χρήσης του $\sqrt[\nu]{\ }$ συνεπής προς τους κανόνες μιας γενίκευσης και επομένως ορθή. Δηλαδή, αν χρησιμοποιηθεί για έναν μη αρνητικό πραγματικό αριθμό να δίνει ως αποτέλεσμα τον αριθμό που γνωρίζουμε. Για να γίνει περισσότερο κατανοητό αυτό ας δούμε ένα παράδειγμα.

<u>Παράδειγμα:</u> Ο αριθμός 81 μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$81 = 81(\cos 0 + i \sin 0).$$

Οι τετάρτης τάξεως ρίζες του 81 στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών δίνονται από τον τύπο:

$$z_\kappa = 3\left(\cos\frac{2\kappa\pi}{4} + i\sin\frac{2\kappa\pi}{4}\right),\ \kappa = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Για $\kappa = 0$ προκύπτει ο αριθμός 3, για $\kappa = 1$ ο αριθμός $3i$, για $\kappa = 2$ ο αριθμός -3 και για $\kappa = 3$ ο αριθμός $-3i$. Με το σύμβολο $\sqrt[4]{\ }$ από τις τέσσερις τετάρτης τάξεως ρίζες του 81, όπως γνωρίζουμε, παριστάνεται μόνο η μη αρνητική πραγματική ρίζα που είναι ο αριθμός 3, δηλαδή έχουμε $\sqrt[4]{81} = 3$. Παρατηρούμε ότι ο αριθμός 3 προκύπτει από τον παραπάνω τύπο για $\kappa = 0$. Το ίδιο λοιπόν πρέπει να ισχύει, αν γενικευθεί η χρήση του, για κάθε μιγαδικό αριθμό διάφορο του μηδενός και για οποιασδήποτε τάξεως ρίζα. Έτσι λοιπόν αν συμφωνηθεί να χρησιμοποιείται το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\ }$ για κάθε μιγαδικό αριθμό, τότε για κάθε αρνητικό πραγματικό αριθμό α με το σύμβολο $\sqrt{\ }$ από τις δύο τετραγωνικές ρίζες του α θα παριστάνεται μόνο η $\left(\sqrt{|a|}\right)\cdot i$, δηλαδή θα γράφουμε: $\sqrt{a} = \left(\sqrt{|a|}\right)\cdot i$, π.χ. $\sqrt{-49} = \sqrt{49}\cdot i = 7i$.

Κλείνοντας θα ήθελα να εκφράσω τον προβληματισμό μου πως ο συμβολισμός της νιοστής ρίζας ενός μιγαδικού αριθμού α ≠ 0 με το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\ }$ για $\kappa = 0$ πρακτικά μάλλον δεν θα εξυπηρετεί και πολύ με την έννοια ότι δεν δημιουργείται πάντα άμεση αντίληψη ενός τέτοιου αριθμού χωρίς ειδική επεξεργασία. Για παράδειγμα, ποια είναι η τιμή της παράστασης $\sqrt{12-35i}$; Μπορούμε να έχουμε άμεση αντίληψη αυτού του αριθμού, αν τον συναντήσουμε σε μία παράσταση; Τελικά, είναι απαραίτητη η χρήση του συμβόλου $\sqrt[\nu]{\ }$ γενικά στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών; Η γενίκευση της χρήσης του θα εξυπηρετήσει κάποιο σκοπό;