Μπορούμε να χρησιμοποιούμε το σύμβολο της νιοστής ρίζας και για μιγαδικούς αριθμούς;

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

Πριν απαντηθεί το παραπάνω ερώτημα νομίζω ότι αξίζει να δούμε μερικά σχόλια σχετικά με τη χρήση του όρου «ρίζα» στα Μαθηματικά και του συμβόλου της νιοστής ρίζας.

Α. Ο όρος «ρίζα» στα Μαθηματικά

Ο όρος «**ρίζα**» στα Μαθηματικά χρησιμοποιείται σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις, οι οποίες είναι: *ρίζα μιας εξίσωσης*, *ρίζα ενός πολυωνύμου* και *ρίζα ενός αριθμού*. Πιο αναλυτικά:

1. **Ρίζα[1] μιας εξίσωσης $F(x) = 0$** (*root of an equation*) με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α ονομάζεται κάθε στοιχείο r του Α, το οποίο επαληθεύει την εξίσωση αυτή, δηλαδή ισχύει:
$$F(r) = 0.$$

2. **Ρίζα ενός πολυωνύμου $P(x)$ του x** (*root of a polynomial*) με σύνολο αναφοράς ένα σύνολο Α ονομάζεται κάθε στοιχείο ρ του Α, το οποίο μηδενίζει το πολυώνυμο $P(x)$, δηλαδή ισχύει $P(\rho) = 0$.
Παρατηρούμε ότι κάθε ρίζα ρ ενός πολυωνύμου $P(x)$ είναι ρίζα της πολυωνυμικής εξίσωσης:
$$P(x) = 0.$$

3. **Ρίζα ενός αριθμού** (*root of a number*). Έστω $\boldsymbol{\alpha}$ ένας μιγαδικός αριθμός και $\boldsymbol{\nu}$ ένας φυσικός αριθμός διάφορος του μηδενός. Οι ρίζες της εξίσωσης:
$$z^{\nu} - \alpha = 0$$
λέγονται **νιοστές ρίζες του μιγαδικού αριθμού $\boldsymbol{\alpha}$.**

Παρατηρούμε ότι ο όρος «ρίζα» χρησιμοποιείται στα Μαθηματικά κυρίως ως «ρίζα μιας εξίσωσης» αφού και στις περιπτώσεις 2 και 3 που αναφέρονται παραπάνω η χρήση του όρου αυτού ανάγεται στη «ρίζα μιας εξίσωσης».

---

[1] Ο όρος «ρίζα» μιας εξίσωσης δεν χρησιμοποιείται μόνο στην ελληνική βιβλιογραφία αλλά και στη διεθνή. Για παράδειγμα, σε βιβλίο διεθνούς εμβέλειας (έκδοση Barron's) που απευθύνεται σε μαθητές της Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης αναφέρεται ο ορισμός: «*Root (or solution) of an equation is a number that makes the equation true when used in place of the variable*».

Όπως γνωρίζουμε, η έννοια «ρίζα» παρουσιάζει μία διαθεματικότητα και δηλώνει ένα «αντικείμενο», το οποίο είναι βασικό, θεμελιώδες για κάποιο άλλο, π.χ. οι ρίζες ενός δένδρου, η ρίζα μιας λέξης, η ρίζα ενός δοντιού κλπ.

Ερμηνεύοντας την διαθεματικότητα της έννοιας της «ρίζας» πιστεύω πως χρησιμοποιείται στα Μαθηματικά ως «ρίζα μιας εξίσωσης», επειδή ο αριθμός ή οι αριθμοί που επαληθεύουν μία εξίσωση αποτελούν τη βασική, την κεντρική ιδέα της εξίσωσης, δηλαδή δεν θα είχε νόημα η εξίσωση χωρίς τους αριθμούς αυτούς. Γι' αυτό άλλωστε και ονομάζονται ρίζες (στήριγμα, βάση) της εξίσωσης.
Για παράδειγμα, τι νόημα θα είχε η ισότητα:

$$3x^2 - 7x + 4 = 0,$$

αν δεν αναζητούσαμε τους πραγματικούς αριθμούς που την επαληθεύουν;

Βλέπουμε λοιπόν ότι μία εξίσωση υποδηλώνει τις ρίζες της ή με άλλα λόγια ότι η έννοια της ρίζας μιας εξίσωσης στηρίζει την ίδια την έννοια της εξίσωσης.

Β. Η νιοστή ρίζα ενός αριθμού και το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\ }$

Στη βιβλιογραφία θεωρώ πως υπάρχει μια σύγχυση σχετικά με τον ορισμό της νιοστής ρίζας ενός μη αρνητικού πραγματικού αριθμού και τη χρήση του συμβόλου $\sqrt[\nu]{\ }$. Για παράδειγμα, στο σχολικό βιβλίο της *Άλγεβρας* της Α΄ Λυκείου αναφέρεται ο παρακάτω ορισμός:
«Η **ν-οστή ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού $\boldsymbol{\alpha}$ συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{a}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός[2] που, όταν υψωθεί στην $\boldsymbol{\nu}$, δίνει τον $\boldsymbol{\alpha}$».
Αντίθετα στο κεφάλαιο των *Μιγαδικών Αριθμών* της Άλγεβρας διαβάζουμε ότι νιοστή ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού $\boldsymbol{\alpha}$ λέγεται κάθε αριθμός που όταν υψωθεί στη ν δίνει τον $\boldsymbol{\alpha}$ (δείτε βιβλίο Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου). Στη συνέχεια στο ίδιο κεφάλαιο της Άλγεβρας διαβάζουμε ότι κάθε μιγαδικός αριθμός $\alpha \neq 0$ έχει ν διαφορετικές νιοστές ρίζες και πως αν $a = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ είναι μια τριγωνομετρική μορφή του α, όπου ρ το μέτρο του και θ ένα όρισμά του, τότε οι ν διαφορετικές νιοστές ρίζες του α δίνονται από τον τύπο:

$$z_\kappa = \sqrt[\nu]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2\kappa\pi}{\nu} + i\sin\frac{\theta + 2\kappa\pi}{\nu}\right) \text{ για } \kappa = 0, 1, \ldots, \nu - 1. \qquad (1)$$

Δημιουργείται λοιπόν το εξής *παράδοξο*:

Αν, για παράδειγμα, πάρουμε τον αριθμό 81, τότε σύμφωνα με τον ορισμό της νιοστής ρίζας που υπάρχει στο κεφάλαιο των Μιγαδικών αριθμών της Άλγεβρας οι πραγματικοί αριθμοί που είναι τετάρτης τάξεως ρίζες του 81 είναι το 3 και το -3, ενώ σύμφωνα με τον ορισμό που υπάρχει στο βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου τετάρτη ρίζα του 81 είναι μόνο το 3(!)

[2] "Αποδεικνύεται ότι υπάρχει και είναι μοναδικός".

Νομίζω πως η σύγχυση αυτή δημιουργείται λόγω της χρήσης του συμβόλου $\sqrt[\nu]{\ }$. Άλλο θέμα είναι η νιοστή ρίζα ενός αριθμού ως έννοια και άλλο ο συμβολισμός. Το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\ }$ συμφωνήθηκε να χρησιμοποιείται μόνο για μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς και να έχει συναρτησιακό χαρακτήρα, δηλαδή μονοσήμαντο αποτέλεσμα, ώστε να μπορεί να χρησιμοποιείται και σε παραστάσεις. Έτσι λοιπόν συμφωνήθηκε με το σύμβολο αυτό να παριστάνεται για κάθε μη αρνητικό πραγματικό αριθμό α ο μη αρνητικός πραγματικός αριθμός που αποτελεί νιοστή ρίζα του α. Με αυτήν την έννοια χρησιμοποιείται και στον τύπο (1).

<u>Η τετραγωνική ρίζα ενός μιγαδικού αριθμού</u>

Σύμφωνα με τον ορισμό της νιοστής ρίζας ενός μιγαδικού αριθμού κάθε μιγαδικός αριθμός διάφορος του μηδενός έχει δύο τετραγωνικές ρίζες που είναι δύο αντίθετοι μιγαδικοί αριθμοί.
Για παράδειγμα, οι τετραγωνικές ρίζες του μιγαδικού αριθμού $5 - 12i$ είναι οι μιγαδικοί $3 - 2i$ και $-3 + 2i$, αφού $(3 - 2i)^2 = (-3 + 2i)^2 = 5 - 12i$.

Από αυτόν τον ορισμό δεν μπορούν να ξεφύγουν οι πραγματικοί αριθμοί, αφού το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι υποσύνολο του συνόλου των μιγαδικών. Δηλαδή κάθε πραγματικός αριθμός διάφορος του μηδενός έχει δύο τετραγωνικές ρίζες, που είναι δύο αντίθετοι πραγματικοί ή φανταστικοί αριθμοί.
Για παράδειγμα, οι τετραγωνικές ρίζες του -25 είναι οι αριθμοί $5i$ και $-5i$, αφού $(5i)^2 = (-5i)^2 = -25$ και οι τετραγωνικές ρίζες του 25 είναι οι αριθμοί 5 και -5, αφού $(5)^2 = (-5)^2 = 25$.
Με το σύμβολο $\sqrt{\ }$ της τετραγωνικής ρίζας παριστάνεται μόνο η θετική τετραγωνική ρίζα του 25, δηλαδή γράφουμε: $\sqrt{25} = 5$.

Γ. Απάντηση του ερωτήματος

Ας έλθουμε τώρα στο ερώτημά μας:
Μπορεί να χρησιμοποιείται το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\ }$ για κάθε μιγαδικό αριθμό;

Εάν η διεθνής μαθηματική κοινότητα συμφωνήσει να επεκταθεί η χρήση του συμβόλου $\sqrt[\nu]{\ }$ γενικά για κάθε μιγαδικό αριθμό, τότε ναι, μπορεί να χρησιμοποιείται. Προσωπικά δεν γνωρίζω αν έχει συμφωνηθεί κάτι τέτοιο. Βλέπω όμως ότι χρησιμοποιείται το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\ }$ σε κάποια πανεπιστημιακά συγγράμματα και για μιγαδικούς αριθμούς και μάλιστα χωρίς συναρτησιακό χαρακτήρα!

Αν συμφωνηθεί να χρησιμοποιείται το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\ }$ και για μιγαδικούς αριθμούς, τότε για κάθε μιγαδικό αριθμό $\alpha \neq 0$ θα πρέπει με το σύμβολο αυτό να παριστάνεται <u>αποκλειστικά και μόνο</u> η νιοστή ρίζα του α που προκύπτει από τον τύπο (1) για $\kappa = 0$ και $\theta = Arg(\alpha)$ (το πρωτεύον όρισμα του μιγαδικού αριθμού α). Αυτό, για να είναι η γενίκευση της χρήσης του $\sqrt[\nu]{\ }$ συνεπής προς τους κανόνες μιας γενίκευσης και επομένως ορθή. Δηλαδή, αν χρησιμοποιηθεί το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\ }$ σύμφωνα με τον γενικό κανόνα για έναν μη αρνητικό πραγματικό αριθμό να δίνει ως αποτέλεσμα τον αριθμό που γνωρίζουμε. Για να γίνει περισσότερο κατανοητό αυτό ας δούμε ένα παράδειγμα.

<u>Παράδειγμα:</u> Ο αριθμός 81 μπορεί να γραφτεί και ως εξής:

$$81 = 81(\cos 0 + i\sin 0),$$

δηλαδή σε τριγωνομετρική μορφή χρησιμοποιώντας το πρωτεύον όρισμά του, που είναι 0 rad. Με αυτό το όρισμα οι τέσσερις διαφορετικές τετάρτης τάξεως ρίζες του 81 στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών δίνονται από τον τύπο:

$$z_\kappa = 3\left(\cos\frac{2\kappa\pi}{4} + i\sin\frac{2\kappa\pi}{4}\right) \text{ για } \kappa = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Πιο συγκεκριμένα:

για $\kappa = 0$ προκύπτει ο αριθμός $z_0 = 3$,

για $\kappa = 1$ προκύπτει ο αριθμός $z_1 = 3i$,

για $\kappa = 2$ προκύπτει ο αριθμός $z_2 = -3$ *και*

για $\kappa = 3$ προκύπτει ο αριθμός $z_3 = -3i$.

Με το σύμβολο $\sqrt[4]{\ }$ από τις τέσσερις τετάρτης τάξεως ρίζες του 81 παριστάνεται μόνο η μη αρνητική πραγματική ρίζα, που είναι ο αριθμός 3, δηλαδή γράφουμε:

$$\sqrt[4]{81} = 3.$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός 3 προκύπτει από τον παραπάνω τύπο για $\kappa = 0$.

Αν λοιπόν γενικευθεί η χρήση του συμβόλου $\sqrt[\nu]{\ }$, θα πρέπει να ισχύει το ίδιο και για κάθε μιγαδικό αριθμό α διάφορο του μηδενός και για οποιασδήποτε τάξεως ρίζα, δηλαδή με το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\ }$ θα παριστάνεται η νιοστή ρίζα του α που προκύπτει από τον τύπο (1) για $\theta = Arg(\alpha)$ και για $\kappa = 0$. Έτσι, θα γράφουμε:

$$\sqrt[\nu]{a} = \sqrt[\nu]{|a|}\left(\cos\frac{Arg(\alpha)}{\nu} + i\sin\frac{Arg(\alpha)}{\nu}\right).$$

<u>Η χρήση του συμβόλου $\sqrt[\nu]{\ }$ για αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς</u>

Επειδή για κάθε αρνητικό πραγματικό αριθμό α είναι $Arg(\alpha) = \pi$ rad, σύμφωνα με τον παραπάνω τύπο για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha < 0$ και για κάθε φυσικό αριθμό $\nu > 0$ θα γράφουμε:

$$\sqrt[\nu]{a} = \sqrt[\nu]{|a|}\left(\cos\frac{\pi}{\nu} + i\sin\frac{\pi}{\nu}\right). \qquad (2)$$

Έτσι, για την τετραγωνική ρίζα ενός αρνητικού πραγματικού αριθμού α θα γράφουμε:

$$\sqrt{\alpha} = \sqrt{|\alpha|}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = \left(\sqrt{|a|}\right)\cdot i,$$

π.χ. $\sqrt{-49} = \sqrt{49}\cdot i = 7i$. Οπότε θα μπορούμε να γράφουμε και $\sqrt{-1} = i$.

<u>Σημείωση</u>: Σε πολλά βιβλία (και στο σχολικό) βλέπουμε ότι χρησιμοποιείται ο τελευταίος συμβολισμός, δηλαδή αναφέρεται ότι: $\sqrt{-1} = i$. Μπορούμε να πούμε λοιπόν ότι οι συγγραφείς αυτών των βιβλίων δέχονται άτυπα τη γενίκευση χρήσης του συμβόλου $\sqrt[\nu]{\ }$ της νιοστής ρίζας, που αναφέρθηκε παραπάνω.

Τέλος, ενδιαφέρον παρουσιάζουν και οι ρίζες περιττής τάξεως των αρνητικών πραγματικών αριθμών που θα συμβολίζονται με το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\ }$ της νιοστής ρίζας, αν γενικευθεί η χρήση του.
Για παράδειγμα, αν α = -8 και ν = 3, τότε σύμφωνα με τον τύπο (2) θα γράφουμε:

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + \sqrt{3}i$$

και όχι $\sqrt[3]{-8} = -2$ που ίσως περίμενε κάποιος.

Σύμφωνα λοιπόν με το πνεύμα της παραπάνω γενίκευσης, αν ο τύπος μιας <u>πραγματικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής</u> περιέχει κάποιο ριζικό περιττής τάξεως, τότε το υπόρριζο δεν μπορεί να είναι αρνητικός αριθμός, όπως ακριβώς και στην περίπτωση ριζικών άρτιας τάξεως.