Πότε μία συνάρτηση 1-1 είναι αναγκαία και γνησίως μονότονη;

Δρ. Παναγιώτης Λ. Θεοδωρόπουλος
Σχολικός Σύμβουλος ΠΕ03
e-mail@p-theodoropoulos.gr

Στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου, στην § 1.3 του Β΄ Μέρους, σελ. 153 αναφέρεται ότι ισχύει η πρόταση: "*αν μία συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, τότε είναι* 1-1" και στη συνέχεια με ένα αντιπαράδειγμα αποδεικνύεται ότι δεν ισχύει γενικά το αντίστροφο, δηλαδή "*μία συνάρτηση* 1-1, *δεν είναι κατ' ανάγκη γνησίως μονότονη*".
Τίθεται λοιπόν το ερώτημα: Με ποιες προϋποθέσεις μία συνάρτηση 1-1 είναι αναγκαία και γνησίως μονότονη;

Στην προσπάθειά μας να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση του αντιπαραδείγματος του σχολικού βιβλίου, που είναι η

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο 0. Αν επιχειρήσουμε να προσπεράσουμε το πρόβλημα της ασυνέχειας στο 0 ορίζοντας τη συνάρτηση:

$$g(x)=\begin{cases} x, & x< 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$$

τότε παρατηρούμε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1 και συνεχής στο πεδίο ορισμού της, αλλά ούτε και αυτή είναι γνησίως μονότονη. Εδώ όμως έχουμε άλλο στοιχείο ως δεδομένο. Το πεδίο ορισμού της g δεν είναι διάστημα, αλλά ένωση ξένων διαστημάτων. Έτσι λοιπόν διατυπώνουμε τον προβληματισμό:
Μία συνάρτηση που ορίζεται σε ένα διάστημα Δ και είναι συνεχής και 1-1, είναι και γνησίως μονότονη;
Για να εξετάσουμε αν ισχύει ο προβληματισμός μας, αρχικά διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα: Μία συνάρτηση *f* είναι γνησίως μονότονη σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της εάν και μόνον εάν για κάθε *α*, *β*, *γ* ∈ Δ με *α* < *β* < *γ* ισχύει:

$$\left(f(a)-f(\beta)\right)\cdot\left(f(\beta)-f(\gamma)\right)>0\,.$$

Απόδειξη: (⇒) Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ οι διαφορές $f(a)-f(\beta)$ και $f(\beta)-f(\gamma)$ για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ με $\alpha<\beta<\gamma$ είναι ομόσημοι αριθμοί, οπότε το γινόμενό τους είναι θετικός αριθμός.

($\Leftarrow$) Αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ο λόγος

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \qquad (1)$$

έχει σταθερό πρόσημο.
Πράγματι, για κάθε α, β, $\gamma \in \Delta$ με $\alpha < \beta < \gamma$ από τη δοθείσα σχέση διαιρώντας και τα δύο μέλη με $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma) > 0$ παίρνουμε:

$$\frac{f(a) - f(\beta)}{\alpha - \beta} \cdot \frac{f(\beta) - f(\gamma)}{\beta - \gamma} > 0,$$

από όπου προκύπτει η (1).
Άρα η f είναι γνησίως μονότονη στο Δ.

Θεωρούμε τώρα μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ, η οποία είναι συνεχής και 1-1. Αν η f δεν είναι γνησίως μονότονη, τότε σύμφωνα με το παραπάνω λήμμα υπάρχουν τρεις αριθμοί α, β, γ του Δ με $\alpha < \beta < \gamma$ για τους οποίους ισχύει:

$$\left(f(a) - f(\beta)\right) \cdot \left(f(\beta) - f(\gamma)\right) \le 0.$$

Επειδή η f είναι 1-1 το "=" αποκλείεται και έτσι οι παράγοντες του παραπάνω γινομένου θα είναι ετερόσημοι αριθμοί, δηλαδή θα ισχύει:

$$f(a) - f(\beta) > 0 \quad \text{και} \quad f(\beta) - f(\gamma) < 0 \quad \text{ή}$$
$$f(a) - f(\beta) < 0 \quad \text{και} \quad f(\beta) - f(\gamma) > 0$$

ή ισοδύναμα:

$$f(a) > f(\beta) \quad \text{και} \quad f(\beta) < f(\gamma) \quad \text{ή}$$
$$f(a) < f(\beta) \quad \text{και} \quad f(\beta) > f(\gamma)$$

ή, πιο παραστατικά:

$$\begin{cases} f(\beta) < f(\alpha) \\ f(\beta) < f(\gamma) \end{cases} \qquad \text{ή} \qquad \begin{cases} f(a) < f(\beta) \\ f(\gamma) < f(\beta) \end{cases}$$

Σύμφωνα με το **Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών** (απαιτείται συνέχεια σε διάστημα για μία συνάρτηση) για κάθε αριθμό $\boldsymbol{\eta}$ με:

$$f(\beta) < \eta < \min\left(f(\alpha), f(\gamma)\right) \quad \text{ή} \quad \max\left(f(a), f(\gamma)\right) < \eta < f(\beta)$$

υπάρχουν αριθμοί $\xi_1 \in (\alpha, \beta)$ και $\xi_2 \in (\beta, \gamma)$ τέτοιοι ώστε $f(\xi_1) = \eta$ και $f(\xi_2) = \eta$. Αυτό όμως είναι άτοπο, διότι η συνάρτηση f είναι 1-1.
Άρα η f είναι γνησίως μονότονη.
Αποδείξαμε λοιπόν ότι ισχύει η παρακάτω πρόταση.

<u>Πρόταση:</u> Αν μία συνάρτηση *f* είναι συνεχής και 1-1 σε ένα διάστημα Δ, τότε είναι γνησίως μονότονη στο Δ.